Contents

HET NUMMERIEK OPLOSSEN VAN INTEGRALEN

1 MET EENVOUDIGE COMPUTER PROGRAMMAS

Door: Jan Spaenjers

1.1 WAT IS DE BEDOELING.

Voor velen onder ons zijn integralen en differentialen illustere onbekenden, of iets dat te ingewikkeld is om er aan te beginnen. Maar niettegenstaande dat, zijn we soms toch wel eens geinteresseerd om bijvoorbeeld eens het verloop te kennen van de spanning over een capaciteit, weerstand of inductantie in een elektronische schakeling. Al is het maar om inzicht te krijgen waarom een schakeling zich zo gedraagt, en dan zitten we vast omdat dit alleen op te lossen valt als men integraal en differentiaal rekenen onder de knie heeft.

Het ligt in mijn bedoeling om in dit ECH-blad, in een drie-tal artikels, een uiteenzetting te houden over:

1) Hoe men toch een nummerieke oplossing kan bekomen van gelijk welke integraal, zonder dat men integraal of differentiaal rekenen moet beheersen. Sommige integralen zijn zelfs wiskundig niet op te lossen, maar numeriek wel!

2) Hoe men een grafiek kan bekomen welke het verloop van de integraal voorstelt, tussen de grenzen dat men de integraal wilt oplossen.

3) Hoe men een generieke oplossing bekomt van alle integraal of differetiaal vergelijkingen van hogere orde.

4) De oplossing wordt verwezenlijkt door VISUAL-BASIC programma’s. (Desnoods om te zetten in Q-BASIC of GW-BASIC).
Toen ik aan de studie begon van dit artikel had ik nog nooit iets in VISUAL-BASIC geprogrammeerd. Daarom ben ik me er terdege van bewust dat mijn programma’s niet de schoonheidsprijs zullen winnen, maar langs de andere kant, door gebrek aan kennis, mijn programma’s zo eenvoudig mogelijk zijn gehouden. En mischien is dit ook een gelegenheid om beginners over te halen er ook eens mee te beginnen.

5) Niettegenstaande dat de programma’s zeer algemeen zijn gehouden, en men er gelijk welke integraal mee kan oplossen (zelfs voor diegene waar geen wiskundige formule voor te vinden is), beperk ik mijn voorbeelden tot elektronische schema’s. We zijn tenslotte toch een electronica-club.

6) Voor de wiskundige knobbels, en al degenen die belangstelling hebben in de wiskundige achtergrond, voeg ik er hier en daar in *cursief gedrukt* wat uitleg bij, maar zodanig dat als men die tekst niet verstaat men gerust dit *cursief* gedeelte kan overslaan zonder de draad te verliezen (hoop ik toch).

Een klein voorbeeldje om duidelijk te maken waarover het gaat:

Veronderstel de volgende R-L-C schakeling:

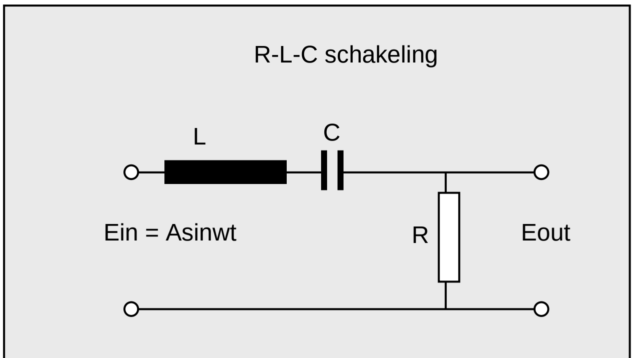


Fig 1

Gevraagd wordt wat is de spanning Eout over de weerstand R in functie van de tijd (b.v: tussen t=1sec tot t=3sec) wanneer aan de schakeling een spanning Ein=A x sin(wt)+B wordt aangelegd.
Met andere woorden, los de vergelijking op A x sin(wt) + B= L/R x dEout/dt + 1/RC∫Eout x dt + Eout.
En bepaal het verloop van Eout in functie van de tijd.

Zij die zich al gewaagd hebben om deze vergelijking wiskundig op te lossen, zijn gedurende een paar uurtjes zoet, en zullen Laplace transformaties onder de knie moeten hebben om tot een algemeen geldende oplossing te komen.

De bedoeling van deze reeks artikels is juist jullie een oplossing te geven, zonder voorkennis van deze wiskundige opleiding, maar natuurlijk wel wat nadenken met een open geest.
De oplossing hier voorgesteld heeft weliswaar de volgende beperkingen:
1)- De oplossing is numeriek. Dit betekent dat niet een algemene-,maar een specifieke-oplossing gegeven wordt. Dit wil zeggen dat de numerieke waarden van alle componenten en de parameters in de schakeling moeten gekend zijn. In het voorbeeld van Fig1 betekent dit b.v. A=5V, w=2π10, B=8V L=5µH, C=2µF, R=10K, en de tijd is tussen 0 en 2sec.
2)- De grafiek en de oplossing beperkt zich dus tot het weergeven van deze differentieel vergelijking van hogere orde tot de numerieke waarden alleen. Het geeft dus b.v. geen Bode-Diagram vermits de oplossing alleen geldt voor w=2π10 en niet voor w gaande van 0 tot 10MHz.
Note: Het oplossen van differentieel vergelijkingen en het weergeven van de amplitude,en de phase in functie van de frekwentie (b.v. tussen 0 en 10MHz) in b.v. steppen van 100Hz is niet eens zo ingewikkeld, maar ook dit is nummeriek!
3)- De oplossing is niet volledig correct, maar geeft slechts een benadering. Maar de fout die men maakt is normaal gezien kleiner dan 1%, en kan theoretisch zo klein gemaakt worden als men wilt.

1.2 WAT IS EEN INTEGRAAL?

In de electronica komen regelmatig integraties voor. Een van de meest gekende fenomenen zijn het opladen van een capaciteit door een stroombron, of de verandering van de stroom door een inductantie onder invloed van een spanning.
Dit is voorgesteld in de volgende figuren.

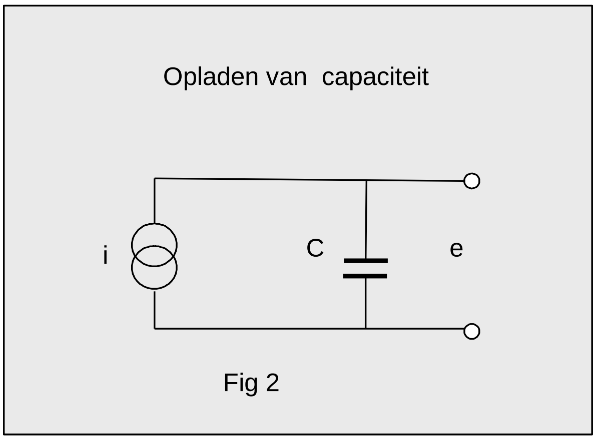


Fig 2

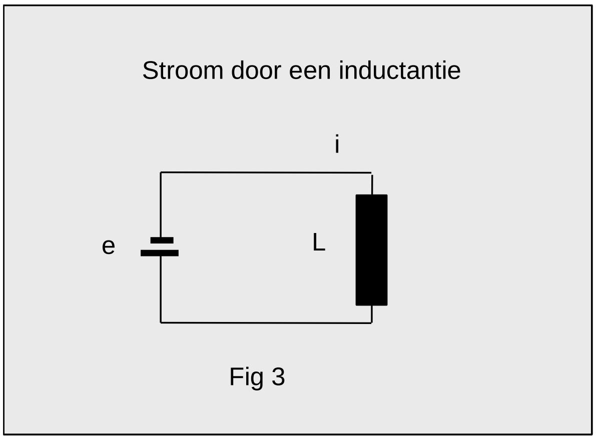


Fig 3

Deze functie wordt wiskundig voorgesteld als :
e = 1/C x ∫ i dt.
Onthoudt deze gouden regel voornamelijk voor degenen die geen integraal rekenen of differentieel rekenen geleerd (of vergeten!) zijn.
Telkenmale we een integraal tegenkomen vervangen we deze door de operator 1/p
Met andere woorden *e = 1/C x ∫ i dt.* **Schrijven we als** *e = 1/C x (i /p) of e = i /C.p*

De fysische betekenis is dat voor het opladen van een capaciteit met een (constante) stroom de spanning over de capaciteit zich opbouwd onder invloed van de stroom.
Zij "i" een constante stroom van electronen, dan zal, na een zekere tijd, als er meer electronen zich in de capaciteit opstapelen, de spanning stijgen. Hoe groter de capaciteit, hoe trager de spanning zich opbouwt, daarom de omgekeerde evenredigheid met C.Dit opbouwen van de stroom, welke veroorzaakt dat de spanning over de capaciteit stijgt, noemt men integreren.

Maar wat gebeurt er wanneer een spanningsbron aangelegd wordt over een spoel?
Uit onze cursus electronica weten we dat dan e = L .di / dt.
Hierook geldt: telkenmale we een differentieel tegenkomen vervangen we deze door de operator p.
Met andere woorden *e = L .di / dt* **schrijven we als** *e = L.i.p*

Waar is hier de integraal?
In dit geval is het niet de spanning die geleidelijk verandert in functie van de tijd, zij kan zelfs in vele gevallen constant blijven, maar wel de stroom door de spoel.
Wanneer we een constante spanning over een inductantie aanleggen zal, door de zelfinductie (Of

noemt het traagheid van het systeem, te vergelijken met een waterrad dat stil stond en plotseling watertoevoer (stroom) krijgt), stilaan, dus na een zekere tijd, meer en meer stroom gaan doorlaten. Hier is dus de stroom de integratie van een (constante) spanning over de spoel.
Voor de wiskundige knobbels onder ons, kunnen we e = L .di / dt ook schrijven als e . dt = L di
En ook e/L dt = di
Indien we beide kanten integreren dan bekomen we ʃe/L dt =ʃdi, en vermits ʃ en d elkaar opheffen bekomen we dat i = ʃe/L dt
Of in woorden: in de spoel wordt er geleidelijk meer stroom doorgelaten (het waterrad begint harder te draaien) als er een (constante) spanningsveschil over de spoel wordt aangelegd. Hoe groter de spoel hoe trager de stroom zich opbouwd, daarom de omgekeerde evenredigheid van L.

Maar wat is nu eigelijk een integraal?
Bekijken we nogmaals de formule e = 1/C x ʃ i dt of anders geschreven e x C = ʃ i dt.
Indien we e x C = g, en i =y, en dt =dx voorstellen, dan is dit in zijn meest algemene vorm voor te stellen als g = ʃ y dx
G = y/p
indien ook de stroom verandert in functie van de tijd schrijven we meestal i = f(t) of y=f(x).
Zo wordt g = ʃ f(x) dx
Nu zonder verder in te gaan op de feitelijke betekenis kunnen we met de volgende wetenschap voor de rest van ons verhaal verder.
Een integraal van y=f(x) tussen de grenzen a,b voorgesteld als g = $\int_a^b$ f(x) dx of
g = f(x)/p iseigenlijk niets anders dan het berekenen van de oppervlakte onder de lijn y=f(x).
Dit is voorgesteld in de volgende fig 4.

In deze figuur is de curve y = 12/(2 +x^2) voorgesteld tussen de grenzen x=1 tot x=4 Hierin is dus f(x) = 12/(2 +x^2).
De meest eenvoudige manier om de integraal g = ∫ f(x) dx uit te rekenen, is door de curve y=f(x) op ter delen in N gelijke stroken, tussen de grenzen 1 en 4. Ieder strookje is gelijk aan een rechthoek waarvan dx = 0.3 en de hoogte gelijk aan y1, y2,.... y10 .De oppervlakte van de deeltjes is dus gelijk aan g1= y1 x dx, g2= y2 x dx ....g10 = y10 x dx.
En de integraal is niets anders dan de som van al de deeltjes of
g = ∫ f(x) dx is g = g1 +g2 +g3 +......g13

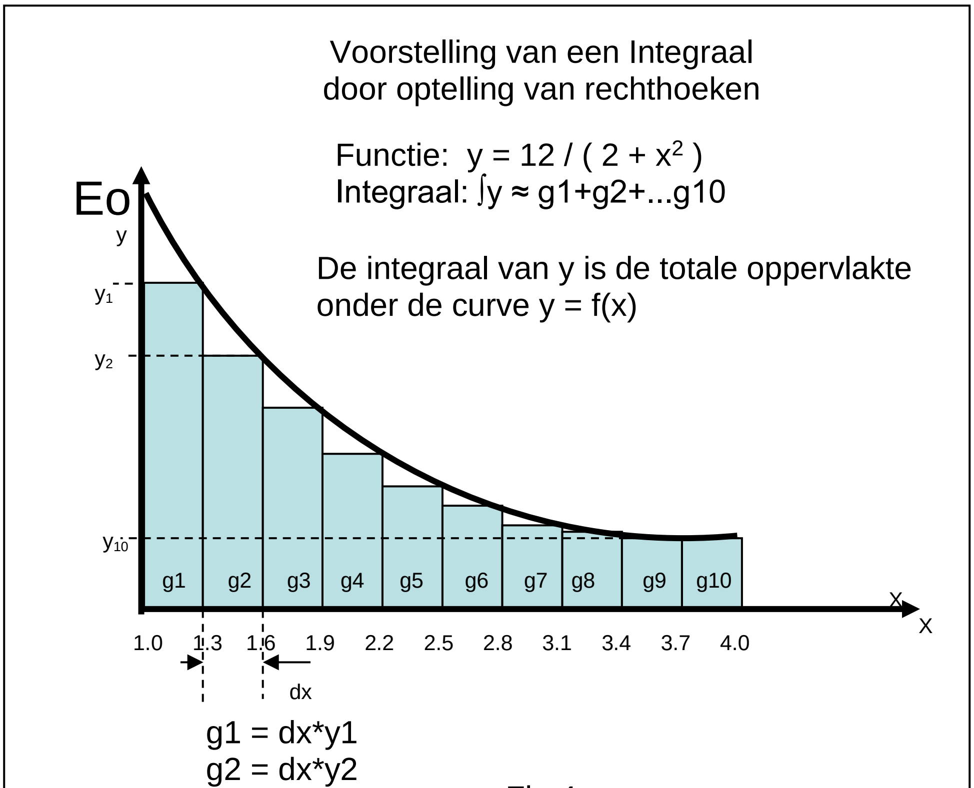


Fig 4

Hoe bereken ik nu dx, y1, y2 ---y10 ?

dx is een willekeurige grootte, maar moet liefst zo klein mogelijk genomen worden, opdat de strookjes zo klein mogelijk zouden zijn. Immers dan zal de fout die we maken tussen de werkelijke oppervlakte onder de curve en de som van alle rechthoekjes het kleinste zijn. Daarom kiezen we dx meestal 1/1000ste van het interval waartussen we de integraal willen berekenen. Dus om een nauwkeurige berekening te maken zou dx moeten zijn (4-1) / 1000 = 0,003 (terwijl in de tekening dx = (4-1)/10 of dx = 0.3).

y1 berekent men door x1= (het begin punt +1 stap verder) in de formule uit te rekenen. In ons voorbeeld is $y = 12/(2 + x^2)$ dus dit wordt

$y1 = 12/(2 + 1.3^2) = 3.252$

en dus g1 = y1 x dx =3.252 x 0.3 = 0.976

x2 = x1+dx, ofwel 1.3 +0.3 = 1.6

zo ook is x3 = x2+dx en zo verder tot x10 = x9+dx.

En dus

$y2 = 12/(2 + 1.6^2) = 2.631$

en g2 = 2.631 x 0.3 = 0.789

Zo ook is $y3 = 12/(2 + 1.9^2) = 2.139$

En g3 = = 2.139 x 0.3 = 0.642

Enz----

Bekijken we nogmaals de formule g = ∫ f(x) dx dan hebben we deze eigenlijk verwezelijkt door g = g1+g2+g3---g20
Of algemeen g = $\sum_0^n g(n)$ met ∑ de betekenis van" de som van", en 0,n "van 0 tot n".

We zien echter duidelijk dat indien we de oppervlakte berekenen met rechthoekjes, we een zichtbare fout maken. Welliswaar zal de fout kleiner zijn als we onze rechthoekjes smaller nemen. Maar er is ook nog een andere oplossing die veel gebruikt wordt , namelijk in plaats van een rechthoek, bereken we de oppervlakte van een trapezium.
Uit onze goeie oude schooltijd weten we dat de oppervlakte van een trapezium is :
(kleine-zijde +grote-zijde)/2 x de basis, of toegepast op de eerste oppervlakte in fig. 5
g1 =(y0 + y1) / 2 x dx
en van de volgende oppervlakte
g2 = (y1 +y2)/2 x dx
of algemeen
g(n) = (y(n) +y(n+1))/2 x dx
en de integraal, of de totale som van alle g(n)´s, is dan
g = g1 + g2 +g3 + ----- g(n)

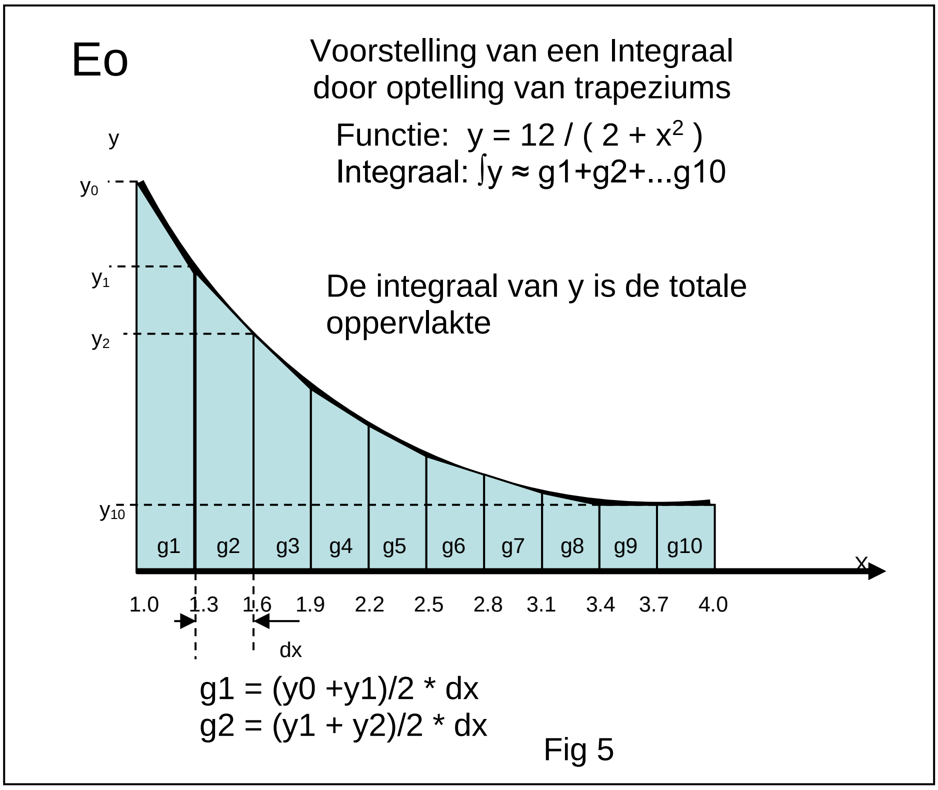


Fig 5

Het is zondermeer in te zien dat de fout die we maken door de oppervlakte onder de curve voor te stellen door trapeziums merkelijk kleiner is geworden.

De exacte oplossing van deze integraal $\int y = \int 12/(2+x^2)dx$ *tussen de grenzen 1 en 4 is 12(1/√2 x* *arctg(1/√2)|₁⁴.*

Om jullie een vergelijkend overzicht te geven tussen de exacte oplossing, en alsdusdanig een feeling te geven van de foutmarge die er bestaat tussen de rechthoekjes methode, ofwel de trapezium methode, en de exacte oplossing, is hieronder een lijst weergegeven met alle berekenigen van iedere oppervlakte onder de curve.

Punt-x	functie	oppervlakte	Exacte oplossing	rechthoek	trapezium
x+dx	$y=12/(2+x^2)$	$g_n=12/(2+x^2)dx$	g=12(1/√2.arctg(1/√2)	g = y.dx	$g = 0.5(y_n+y_{n+1})$

1	4	1,2	0	0	
1,3	3,252033	0,97561	1,084957	0,97561	1,087805
1,6	2,631579	0,789474	1,964151	1,765083	1,970347
1,9	2,139037	0,641711	2,676756	2,406795	2,685939
2,2	1,754386	0,526316	3,258368	2,93311	3,269953
2,5	1,454545	0,436364	3,737857	3,369474	3,751292
2,8	1,219512	0,365854	4,137561	3,735328	4,152401
3,1	1,033592	0,310078	4,474463	4,045405	4,490367
3,4	0,884956	0,265487	4,761434	4,310892	4,778149
3,7	0,764818	0,229446	5,008278	4,540338	5,025615
4	0,666667	0,2	5,222519	4,740338	5,240338

Zelfs met een indeling van 10 stappen is het verschil tussen de trapezium regel en de exacte oplossing zeer miniem.

In een curve ziet dit er uit als in Fig 6
De exacte oplossing en de trapezium regel vallen zo dicht op elkaar dat ze in de tekening niet meer te ondescheiden zijn.

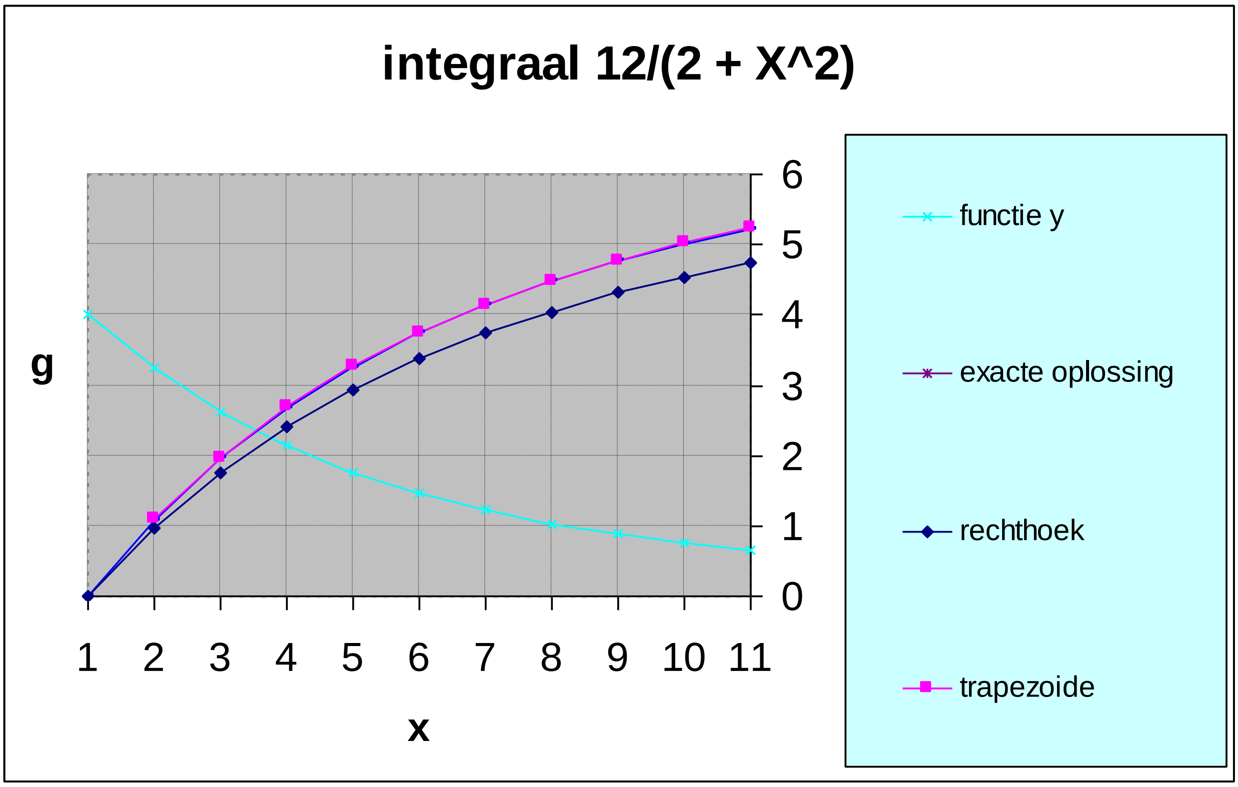


fig 6

Noteer dat in de literatuur nog veel meer en nauwkeuriger methodes vermeld worden om een integraal uit te rekenen.
Zo wordt de methode met rechthoekjes ook nog de methode van Euler genoemd,
De trapezium regel is de methode van Newton
Maar er bestaat ook nog de uitgebreide regel van Newton,
Nog nauwkeuriger is de 1/3 regel van Simpson, of de 3/8 regel van Simpson.
Nog beter is de regel van Weddle... en nog anderen.
Maar zoals we reeds gezien hebben moesten we met de rechthoekjes slechts eenmaal y_n uitrekenen om ons rechthoekje te berekenen. Met de trapezium regel moesten we reeds tweemaal y (y_n en y_{n+1}) uitrekenen vooraleer we onze eerste trapezium konden berekenen. Voor alle andere regels geldt dat er minstens 3 of meerdere y_n waarden moeten uitrekenend worden vooraleer we onze eerste oppervlakte onder de curve kunnen berekenen.
Ik beperk me tot de eenvoudige rechthoekjes en de trapeziums. Voornamelijk met de trapezium regel kan men vrij nauwkeurige resultaten behalen en blijft het computer programma nog relatief eenvoudig.

1.2.1 Een eenvoudig elektronisch voorbeeld met een eenvoudige functie

Laten we, hetgeen we tot hiertoe gezien hebben eens even illustreren met een eenvoudig elektrisch voorbeeld.
Eigenaardig genoeg zijn er in de elektronika wereld weinig voorbeelden van een integratie van de eerste orde.

Fig 2 en Fig 3 zijn wel voorbeelden , maar de ideale voorstelling van een stroombron aan een capaciteit of een spanningsbron over een spoel zal men in de praktijk niet tegenkomen, want het is zondermeer in te zien dat naar een tijdje ofwel de spanning zo hoog oploopt dat de capaciteit kapotspringt ofwel dat de stroom door de spoel zo groot wordt dat we met een kortsluiting te doen hebben.
Een beter aanschouwelijk voorbeeld is een integrator met een OpAmp zoals afgebeeld in Fig 7

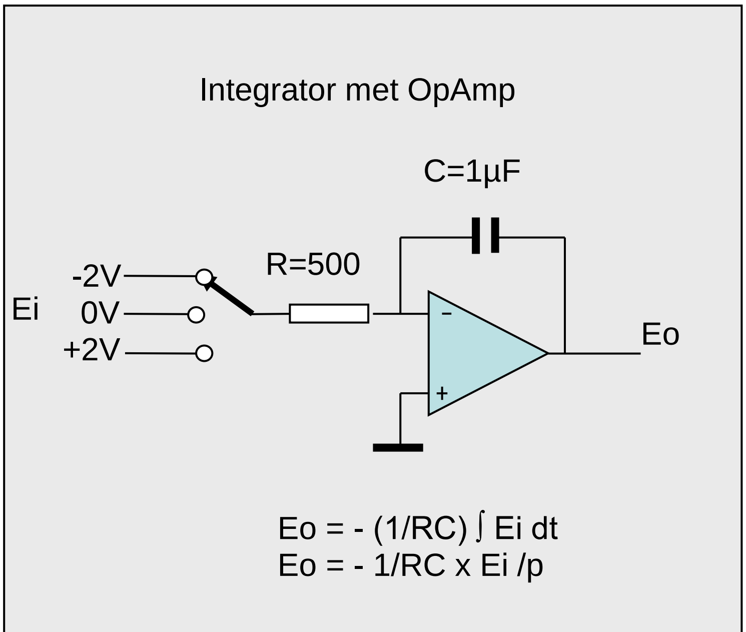


Fig 7

Eerst een beetje uitleg over het schema.
Vermits de versterkingsfaktor geweldig groot mag verondersteld worden (meer dan 1000) zal de spanning tussen – en + aansluiting zeer klein zijn, en daarom praktisch gelijk aan 0 volt. En vermits de ingangsimpedantie geweldig groot kan beschouwd worden, is de stroom in de OpAmp praktisch gelijk aan 0 Amp. Dit betekent dat de volledige stroom door de weerstand R en vervolgens ook door de capaciteit C vloeit.
Dus Ei-Eo = (R + 1/Cp) x i
Maar Ei/R = i dus vullen we i in dan bekomen we:
Ei- Eo = (R + 1/Cp) x Ei/R
Na het wegwerken van de noemer bekomen we
(Ei- Eo) x RCp = (RCp + 1) x Ei
Ei x RCp –Eo x RCp = Ei x RCp + Ei
Hieruit halen we
Eo = - Ei / RCp
en met in gedachten dat 1/p = ∫ dt volgt dat
Eo = - 1 / RC ∫ Ei .dt
Dus de uitgangsspanning is de integraal van de aangelegde ingangsspanning.

Sluiten we deze schakeling aan op een ingangsbron zoals in Fig 7 is aangegeven , namelijk na 3 sec

wordt de schakeling gedurende 3 sec. Aan – 2V gelegd, de volgende 3 sec. Aan 0 V, en vervolgens nogmaals 3 sec. Aan + 2 V.
Dan zal hierdoor de spanning aan de uitgang verlopen zoals te zien is in Fig 7a (bovenste tekening) te zien is.
Vermits R=500K en C=1µF is R x C = $500x10^{3}$ x $1x10^{-6}$ = 0.5sec

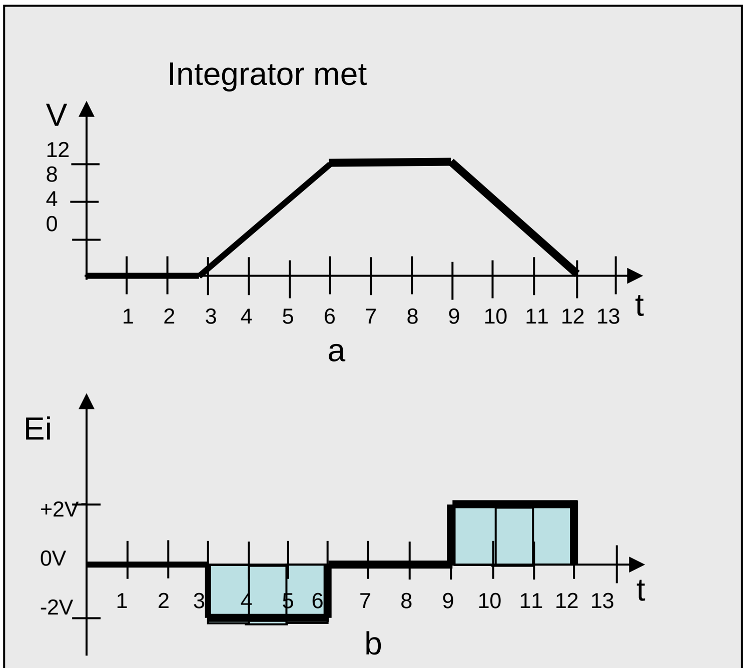


Fig 8

Vermits Ei een constante is zal tussen 3 en 6 seconden de capaciteit lineair stijgen volgens de formule Eo = -1/RC x Ei of Eo = - 1/0.5 x (-2V)x 3s = 12V.
Merk op dat dit gelijk is aan -2V x 3s x(-1/0.5), wat dus gelijk is aan de oppervlakte onder de lijn tussen 3 en 6 sec vermenigvuldigt met -1/RC.
Tussen de tijdspanne 6 en 9 sec. Is Ei =0V en dus de oppervlakte onder Ei =0. De **totale** opppervlakte verandert dus niet, en blijft dus gelijk aan 12 V.
Vanaf sec. 9 tot 12 gebeurt het tegenovergestelde en zal de spanning terug afvallen tot 0 V.

1.3 Voorstelling in een blokdiagram van een integraal met rechthoekjes

En nu komt het meest merkwaardige.
Deze zelfde integraal, maar dan verwezenlijkt met het opdelen in kleine segmenten, met een breedte DX kan ook voorgesteld worden met hetvolgende gelijkwaardig blokschema zoals getekend in Fig 9a en 9b.

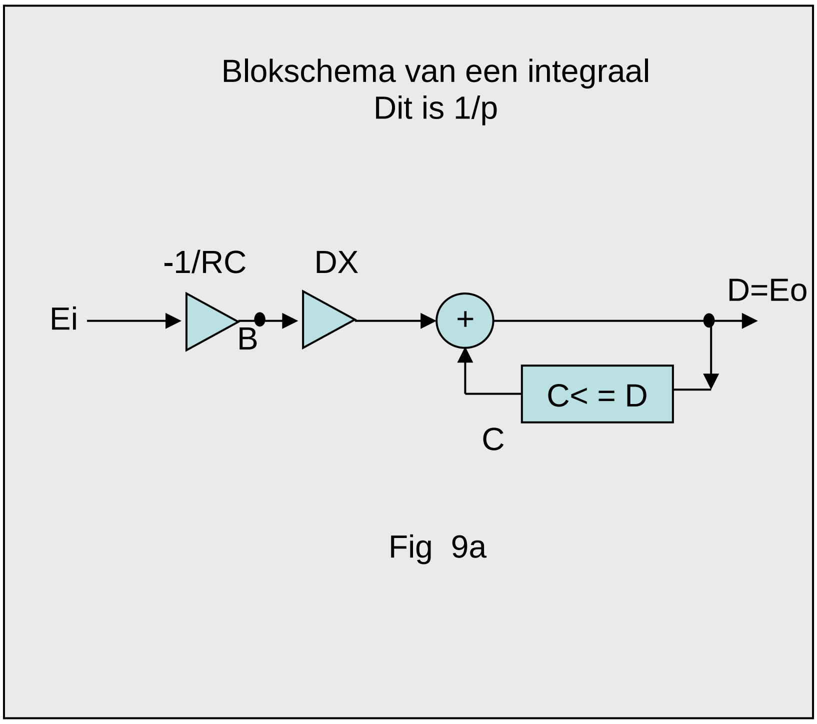


Fig 9a

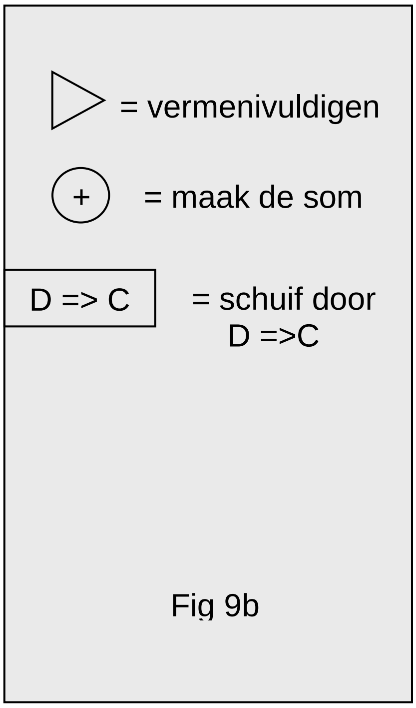


Fig 9b

hierin is B = Ei x (-1/RC) = -Ei/RC
en C is de vorige toestand van D. Het blokje C<=D is dus eigelijk niets anders dan een geheugen lokatie waar de waarde van D bewaard wordt .
Dus D = C + B x DX
Maar D = Eo
En vullen we B in dan bekomen we
Eo = C – Ei/RC x DX
C is in feite de toestand van Eo juist voor de uitgang in de lokatie geschoven werd.
Wanneer de vorige toestand de waarde van D=0 dan is C=0
We zien dat -1/RC x Ei x DX niets anders is dan de berekening van ons rechthoekje g1.
Of ingevuld na 3 seconden wanneer Ei = -2V wordt, bekomen we met -1/RC = -1/0.5 = -2 en DX = 1sec.
Eo_4 = 0 +(-2V) x (-2) x 1s = 4 V

Wanneer g1 berekent is schuiven we deze waarde in het register. En we gaan verder met het berekenen van g2.
Dit wordt verwezenlijkt door na iedere DX tijd de volgende waarde van Ei te berekenen.
Dan begint het proces terug opnieuw.
g2 wordt berekent op dezelfde manier:
Eo_5 = 4 V +(-2V) x (-2) x 1s = 8 V
Eo_5 is dus in feite de optelling van g1 en g2
En voor de derde keer wordt Eo berekent als volgt:
Eo_6 = 8 V +(-2V) x (-2) x 1s = 12 V

Na 3 seconden werd de schakelaar op 0V gezet en de berekeningen gaan verder:
Eo_7 =12 V + (0V) x (-2) x 1s = 12 V note 0V x gelijk welk getal =0

Zo ook
Eo_8 = 12 V + (0V) x (-2) x 1s = 12 V
Eo_9 = 12 V + (0V) x (-2) x 1s = 12 V
Dan wordt de schakelaar op +2V geschakeld en we rekenen verder:
Eo_{10} =12 V + (+2V) x (-2) x 1s = 8 V
Eo_{11} =8 V + (+2V) x (-2) x 1s = 4 V
Eo_{12} = 4V + (+2V) x (-2) x 1s = 0 V

In een tafel ziet dit er uit als volgt:

tijd	Ei	Ei x (-1/RC)	Eo_n
1	0	0	0
2	0	0	0
3	-2	+4	0
4	-2	+4	+4
5	-2	+4	+8
6	0	0	+12
7	0	0	+12
8	0	0	+12
9	+2	-4	+12
10	+2	-4	+8
11	+2	-4	+4
12	0	0	0

Voorstelling in een blokdiagram van een integraal met trapeziums

Het blokschema met trapezium regel is weergegeven in fig10.
Het verschil ten opzichte van het vorige is dat aan de kop telkenmale de input wordt doorgeschoven van B naar A. Dit doorschuiven gebeurt telkenmale men de volgende Ei input berekent. Dit wil zeggen telkens dx een plaats opschuift.

Eens dit is gebeurt kan men de trapezium regel uitvoeren, namelijk de oppervlakte onder de curve g = Ei x (-1/RC) x (A + B) / 2 x DX
De optelling van de verschillende Eo = g1 + g2 + g3 --- gn gebeurt dus weer door het doorschuiven van D in C.
Dusdanig is D = Eo = C + Ei x (-1/RC) x (A + B) / 2 x DX
En vermits C gelijk is aan de voorgaande Eo resultaten bekomen we tenslotte dat nadat alle trapeziums zijn uitgerekend dat Eo = g1 + g2 + g3 --- gn.

In de wiskunde wordt zulk een verschuiving aangeduidt door de index aanpassing.
Immers indien B de n^{de} sample is dan is A de $(n-1)^{de}$ sample. Of A(n) =B(n-1).
Zo ook is C(n) = D(n-1)

Blokschema van een integraal : Trapezium

1/p

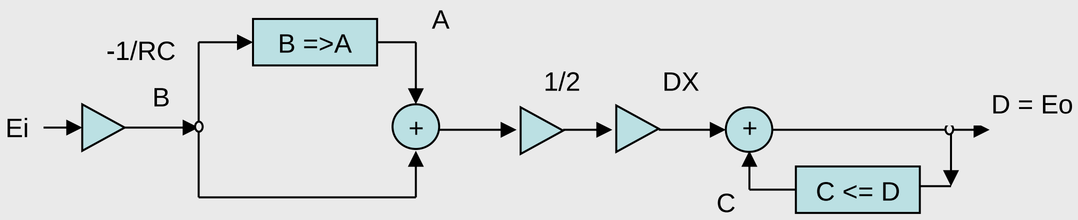


Fig 10

1.3.1 Wat kan een computer nu voor ons doen?

Het vertalen van onze blokschemas kan door een computer op zeer eenvoudige wijze verwezenlijkt worden door een:
FOR I = 1 TO N, STEP DX functie.

Laten we Fig 9 met de rechthoekjes eens proberen te vertalen in een BASIC programma taaltje.
‘zetten we eerst onze componenten op 0’
D, C ,Ei = 0
‘Bepalen we eerst de begin waarde en eindwaarde van de integraal:’
Xbegin = 3 ‘sec’
Xeinde = 12 ‘sec’
‘Bepalen we de RC constante’
RC = 500e3 * 1e-6
‘bepalen we het aantal keren we een rechthoekje willen uitrekenen’
N = 9
‘bepalen we DX ‘
DX = (Xeinde - Xbegin) / N ‘ en DX is dus 1 sec’
‘Nu vertalen we het blokschema in een FOR loop’
FOR I = 1 TO N, STEP DX
‘bereken nu de waarde van Ei voor het tijdsstip N’
    IF N < 4 then Ei = -2 ‘Volt’
    Else IF 3 < N < 7 Ei = 0 ‘Volt’
    Else IF 6 < N < 10 Ei = +2 ‘Volt’
B = Ei*(-1/RC)
D = C + B*DX
C = D
NEXT I
Eo = D
PRINT “de integral is “; Eo

Dit is de kern van het verhaal, de gehele integraal wordt uitgerekend door deze eenvoudige instructies.

FOR I = 1 TO N, STEP DX
Call Ei 'bereken een nieuwe waarde Ei voor het tijdstip N'
B = Ei*(-1/RC)
D = C + B*DX
C = D
NEXT I

Laten we nu eens hetzelfde doen met de trapezium regel, waarvan het blokschema is weergegeven in fig10.
We moeten eerst Ei*(-1/RC) berekenen voor tijdsstip 0 en deze waarde doorschuiven van B naar A en dan de trapeziumregel toepassen ofwel:

N=0
Call Ei 'bereken een waarde Ei voor het tijdstip N = 0'
B = Ei*(-1/RC)
A=B
FOR I = 1 TO N, STEP DX
Call Ei 'bereken een nieuwe waarde Ei voor het tijdstip N'
B = Ei*(-1/RC)
D = C +(A + B)/2 * DX
C = D
A = B
NEXT I

Noteer als ik er voor zorg dat 1/RC = -1 dan hoef ik de bewerking **B = Ei*(-1/RC)** niet te doen.
Noteer dat ingeval ik in plaats van Ei een willekeurige functie zou invullen, zoiets als Ei = $10x^2 + 5x + 3$ of mischien Ei = Sin(2x) + e^{-2x} dan ook zal op dezelfde wijze Eo mij de integraal geven van de functie Ei.

Het is natuurlijk altijd interessant om wat je berekend hebt dat je dit ook kan laten zien in een grafiek.
Nu is het weergeven van een mooie grafiek nogal een ingewikkeld en zwaar program. In mijn tweede artikel zal ik hier meer in details op terug komen, maar voor het afsluiten van dit eerste artikel voeg ik hierbij een Visual Basic program dat zo eenvoudig mogelijk weergeeft wat hier is uitgelegd.

Naar hartelust kan je onderaan in de Private Function Ei(XT), dit is in feite een subroutine, de uitdrukkinf Ei = 3 * x^2 + 4 vervangen door gelijk welke uitdrukking, zoals b.v. Ei = sin(x) + e^{-2x} ,
En dan zal het progamma je de integraal uitrekenen.
Om het eenvoudig te houden wordt er gevraagd om de maximale waarde van de integraal in te typen, maar meestal weet men dit niet bij voorbaat.
Daarom vul de eerste maal een willekeurig getal in en bekijk de kurve. Gaat de gafiek buiten de tekenruimte dan herhaal je het nogmaals en past de waarde aan.
Heb je daarentegen de waarde te hoog ingeschat en ligt je kurve nogal laag tegen de x-as, dan verhoog je de waarde gedurende een tweede run.

```
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
--
Private Sub tekening_PictureBox()

End Sub
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
--
Private Sub cmdStart_Click(index As Integer)
Dim Eo(1001)
Dim A, B, C, D, XA, XB As Single
Dim N
LFCR = Chr(13) + Chr(10)
Rem use "," instead of "." for fractional numbers
txtTitle = txtTitle & LFCR & "Gebruik ' , ' in plaats van ' . ' voor gebroken getallen"
XA = InputBox("ondergrens waarde XA", "XA=?")
XB = InputBox("bovengrens waarde XB", "XB=?")
YM = InputBox("Maximum verwachte integraal waarde", "YM=?")
N = InputBox("aantal intervals N", "N=?")
If N = "" Then N = 100
XT = XA
Rem calculate DX
DX = (XB - XA) / N
Rem calculate Ei(0)
Call Ei(XT)
B = Ei(XT)
A = B
Rem calculate the N-1 terms
For I = 1 To N
XT = XT + DX
Call Ei(XT)
B = Ei(XT)
D = C + (A + B) * 0.5 * DX
C = D
A = B
Eo(I) = D
Next I
Print "the value of the integral is "; Eo(N)
Eores = Format(Eo(N), "###,##0.00")
intResult.Text = Eores
Rem init grafiek
tekening.CurrentX = 240
tekening.CurrentY = 4440
For I = 0 To (N - 1)
YS = (Eo(I + 1) - Eo(I)) / YM
tekening.Line -Step(4560 / N, -4200 * YS)
Next I
End Sub
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
--
Private Sub cmdStop_Click()
End
End Sub
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
--
Private Function Ei(XT)
X = XT
Ei = 3 * X ^ 2 + 4
End Function
```

2 INTEGRALEN MET TERUGKOPPELING.

In mijn vorig artikel heb ik proberen uit te leggen hoe men een integraal kan berekenen van de input functie (Ein).
En het resultaat van deze integratie was de output (Eout).

De input functie f(x) = y kan gelijk welke functie zijn. B.v. $y = x^2 + 2x + 3$ *ofwel*
$y = \sin(x) + e^{-2x}$.
Zelfs kan men niet continue functies bedenken zoals in ons vorig voorbeeld y = 0 tussen 3 en 6 en y = b tussen 6 en 9 en y = 0 tussen 9 en 12.
Maar tot hiertoe werden de x-componenten zuiver gescheiden van de y-componenten, met andere woorden we waren bezig met de integraal uit te rekenen van een funtie zoals $y = x^2 + 2x + 3$.
Maar de meeste elektronische schakelingen zijn vergelijkingen met terugkoppelingen, en dan pas begint de moeilijkheid, want wat gebeurt er als (een gedeelte van) de uitgang teruggekoppeld wordt aan de ingang?
Laten we dat even illustreren met een voorbeeld zoals te zien is in fig.1

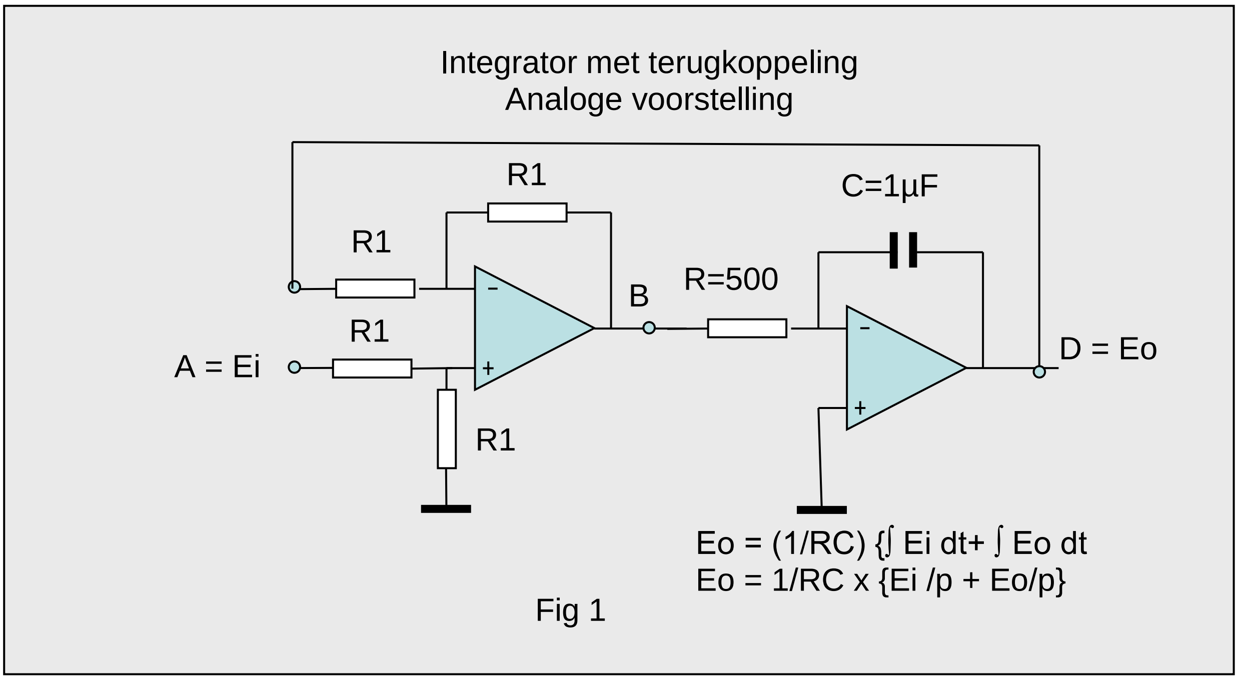


Fig 1

Hier is voor onze normale integrator een verschilversterker geplaatst, en de uitgang Eo is teruggekoppeld aan de ingang en afgetrokken van Ei.
Laten we even deze schakeling analyzeren:
Het is eenvoudig in te zien dat;
B = D – A, immers bij een OpAmp is de uitgang gelijk aan het verschil van de ingangen wanneer alle weerstanden R1 gelijk zijn.
Maar uit vorig artikel weten we dat
D = - B / RCp
Vullen we dit in dan bekomen we
D = - (D – A) / RCp

Vermits D=Eo en A = Ei hebben we
Eo = -Eo / RCp + Ei / RCp

Wiskundig komt dit overeen met de uitdrukking, als we a = 1/ RC stellen.
Y = -a ∫y + a ∫x .Hierin ziet men duidelijk dat y zowel de integraal is van x en van y.

Rangschikken we deze uitdrukking als
Eo x RCp + Eo = Ei
Eo / Ei = 1 /(1 + RCp)

Bekijken we figuur 2 waarin we het blokje 1/p herkennen als onze integrator (hetzij met rechthoekjes of met de trapezium regel zoals uitgelegd in vorig artikel). De uitgang wordt teruggekoppeld en met -1 vermenigvuldigd en opgeteld met de ingang A = Ei. En de som hiervan wordt nogmaals vermenigvuldigd met 1/RC.

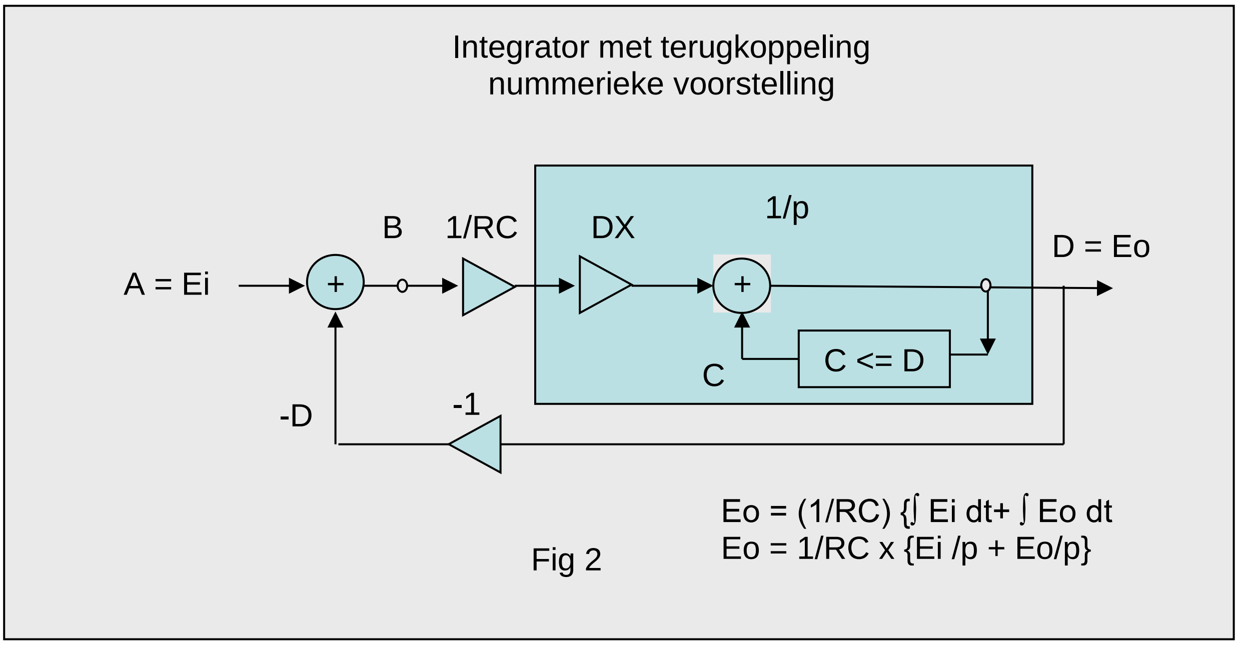


Fig 2

Een eenvoudige analyze zegt ons dat
B = A – D
En vermits D = B / RCp ofwel B = D x RCp
Vullen we dit in dan bekomen we
D x RCp = A – D
En vermits D = Eo en A = Ei krijgen we
Eo (1 + RCp) = Ei ofwel

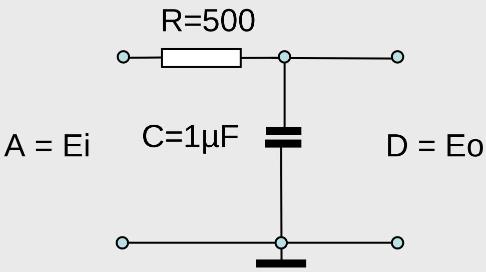
$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + R\cdot C\cdot p^{1}}$$

En dat is precies dezelfde formule als bij de analyze van onze schakeling met OpAmps.
Dus ons blokschema schijnt te kloppen.
Later zal blijken dat dit blokschema zeer eenvoudig om te zetten is in een BASIC, FORTAN of C programma.

2.1.1 OEFENING 1

Nemen we er nog een ander eenvoudig en welgekend RC schema bij, zoals voorgesteld in figuur 3, en laten we ook dit even nader analyzeren.

RC keten
Analoge voorstelling



$Eo = (1/RC) \{\int Ei\, dt + \int Eo\, dt$

$Eo = 1/RC \times \{Ei/p + Eo/p\}$

Fig 3

Hierin zien we dat

$(Ei - Eo) / R = i$ en

$Eo = 1/C \int i\, dt$ of zoals uitgelegd in vorig artikel $Eo = i / Cp$ en dus $i = Eo \times Cp$

Vullen we dit in dan bekomen we

$(Ei - Eo) / R = Eo \times Cp$

$Ei - Eo = Eo \times RCp$

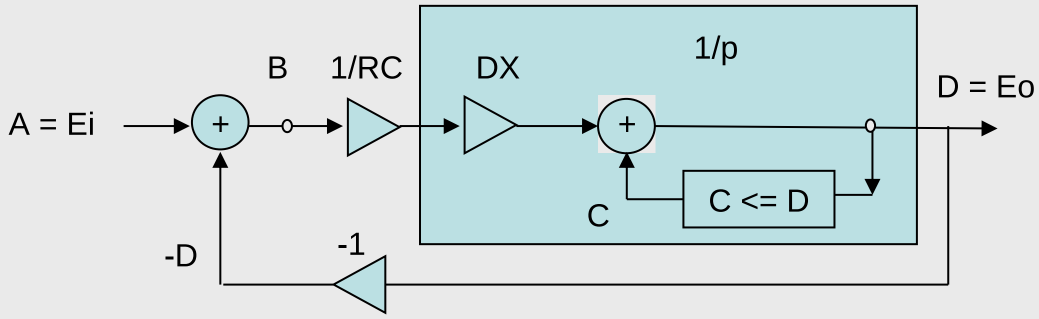
$Ei = Eo(1 + RCp)$

Ofwel

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p^{1}}$$

Klaarblijkelijk is dit weer dezelfde formule als in de vorige schakeling met de OpAmps en dus kan ook deze schakeling met hetzelfde blokschema voorgesteld worden, zoals nogmaals te zien is in figuur 4.

Integrator met terugkoppeling
nummerieke voorstelling



Eo = (1/RC) {∫ Ei dt+ ∫ Eo dt}
Eo = 1/RC x {Ei /p + Eo/p}

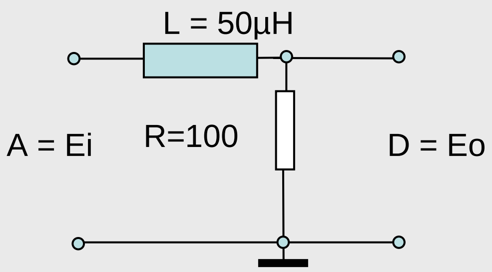
Fig 4

Laten we nu nog eens een paar andere oefeningen doen.

2.1.2 OEFENING 2

Een eenvoudige LR schakeling zoals voorgesteld in Figuur 5 en met bijbehorend blokschema in Figuur 6.

RC keten
Analoge voorstelling



Eo = (R/L) {∫ Ei dt+ ∫ Eo dt}
Eo = R/L x {Ei /p + Eo/p}

Fig 5

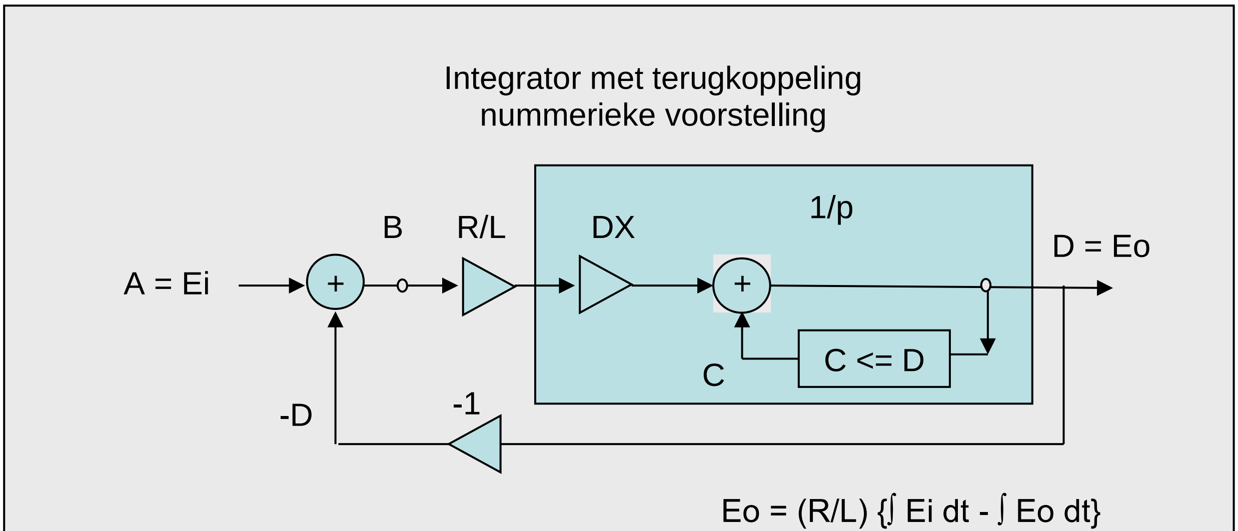


Fig 6

Op analoge wijze als met het RC netwerk bekomen we:
Eo = R x i ofwel Eo / R = i
Ei – Eo = Lp x i ofwel (Ei – Eo) / Lp = i dus bekomen we
Eo / R =(Ei – Eo) / Lp of anders geschreven
Eo = R/L x (Ei / p – Eo / p) . Aldusdanig uitgedrukt is dit niets anders dan de voorstelling van het blokdiagram. Maar meestal zal men deze uitdrukking verder vereenvoudigen tot:
Eo x Lp = (Ei – Eo) x R
Eo (Lp + R) = Ei x R en aldus bekomen we onze algemene vorm
Eo / Ei = R /(R + Lp) of nog

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p^1}$$

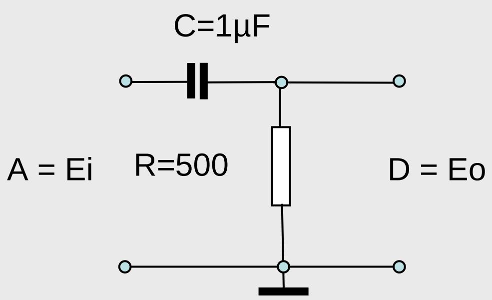
2.1.3 OEFENING 3

Een eenvoudige CR schakeling zoals voorgesteld in Figuur 7 en met bijbehorend blokschema in Figuur 8.
Op analoge wijze als met het LR netwerk bekomen we:

Eo = R x i ofwel Eo / R = i
Ei – Eo = (1 / Cp) x i ofwel (Ei – Eo) Cp = i dus bekomen we
Eo / R =(Ei – Eo) x Cp of anders geschreven
Eo = (Ei – Eo) x RCp ofwel Ei x RCp – Eo x RCp = Eo
Eo x RCp = Ei x RCp –Eo
Eo = Ei – Eo/ RCp of nog anders geschreven Eo = 1/RC (Ei x RC – Eo / p) . Aldusdanig uitgedrukt is dit niets anders dan de voorstelling van het blokdiagram. Maar meestal zal men deze uitdrukking verder vereenvoudigen tot:
Eo / R =(Ei – Eo) / Lp
Eo = RCp (Ei – Eo)
Eo (1 + RCp) = Ei x RCp

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R \cdot C \cdot p^1}{1 + R \cdot C \cdot p^1}$$

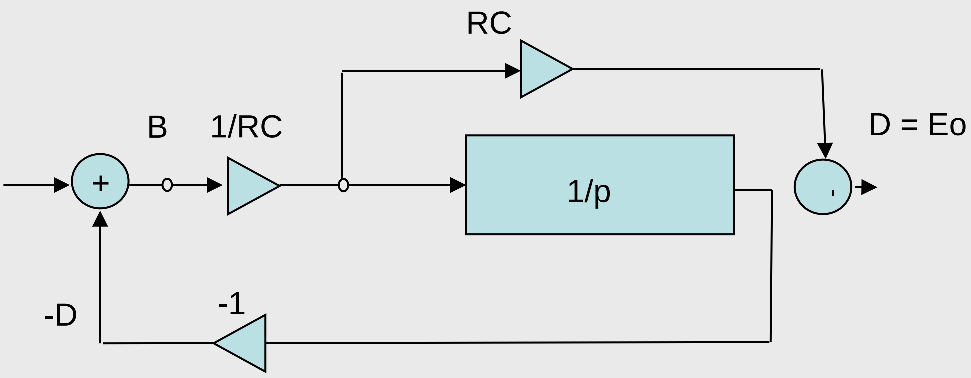
RC keten
Analoge voorstelling



Eo = (1/RC) { Ei.RC - ∫ Eo dt}
Eo = 1/RC x {Ei.RC - Eo/p}

Fig 7

Integrator met terugkoppeling
nummerieke voorstelling



Eo = (1/RC) {∫ Ei dt - ∫ Eo dt}
Eo = 1/RC x {Ei.RC - Eo/p}

Fig 8

Men ziet hier ook een voorwaardse vermenigvuldiging met RC verschijnen.

2.1.4 OEFENING 4

Een eenvoudige RL schakeling zoals voorgesteld in Figuur 9 en met bijbehorend blokschema in Figuur

10.
Op analoge wijze als met het RC netwerk bekomen we:

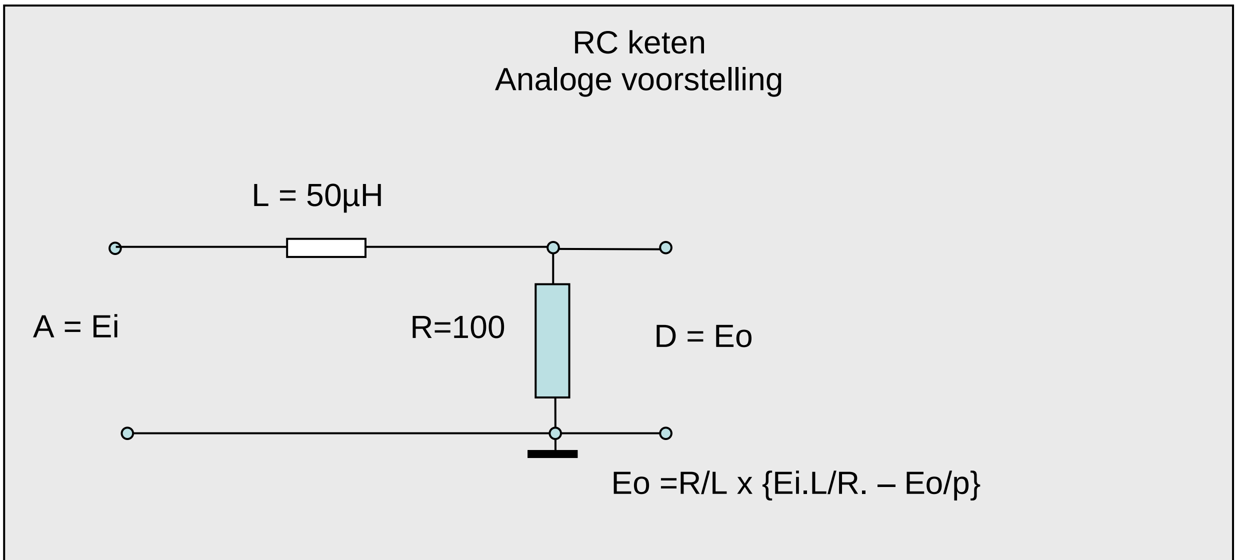


Fig 9

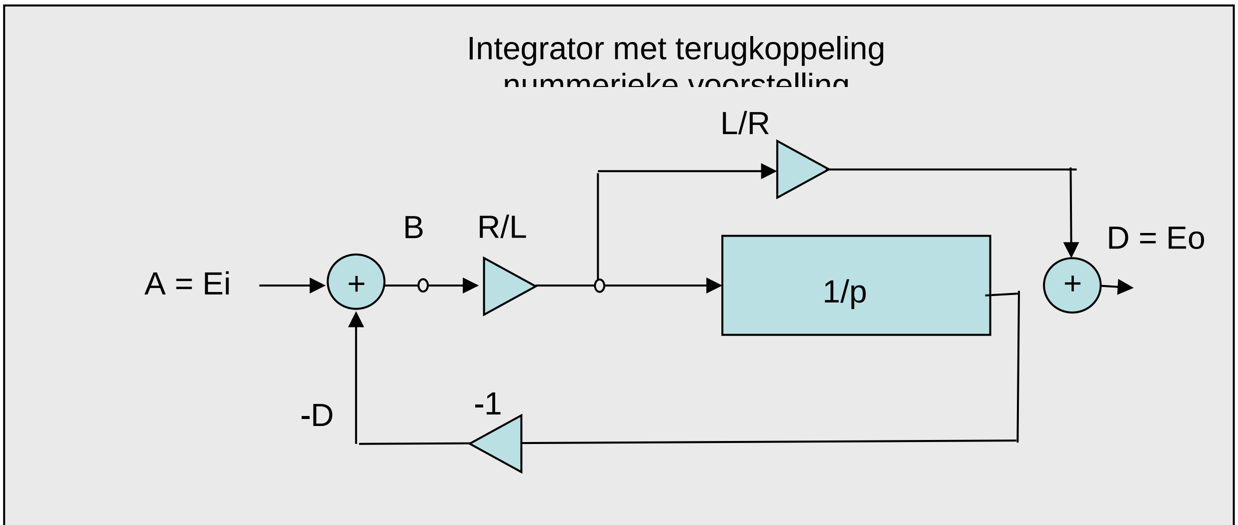


Fig10

Eo = Lp x i en Ei – Eo = R x i dus
Eo / Lp = (Ei – Eo)/R en hieruit volgt Eo x R/Lp = Ei –Eo ofwel
Eo = Ei – Eo x R/Lp dit kan ook nog anders geschreven worden als
Eo = L/R (Ei.R/L – Eo/p)
Maar meestal zal men deze uitdrukking verder vereenvoudigen tot:

Eo x R/Lp = Ei –Eo
Eo x R = (Ei –Eo) x Lp
Eo(R + Lp) = Ei x Lp
Eo / Ei = Lp / (R + Lp) of ook meestal geschreven als

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{\frac{L}{R}\cdot p^{1}}{1 + \frac{L}{R}\cdot p^{1}}$$

2.1.5 OEFENING 5

Een iets meer uitgebreid RC schakeling zoals voorgesteld in Figuur 11 en met bijbehorend blokschema in Figuur 12.

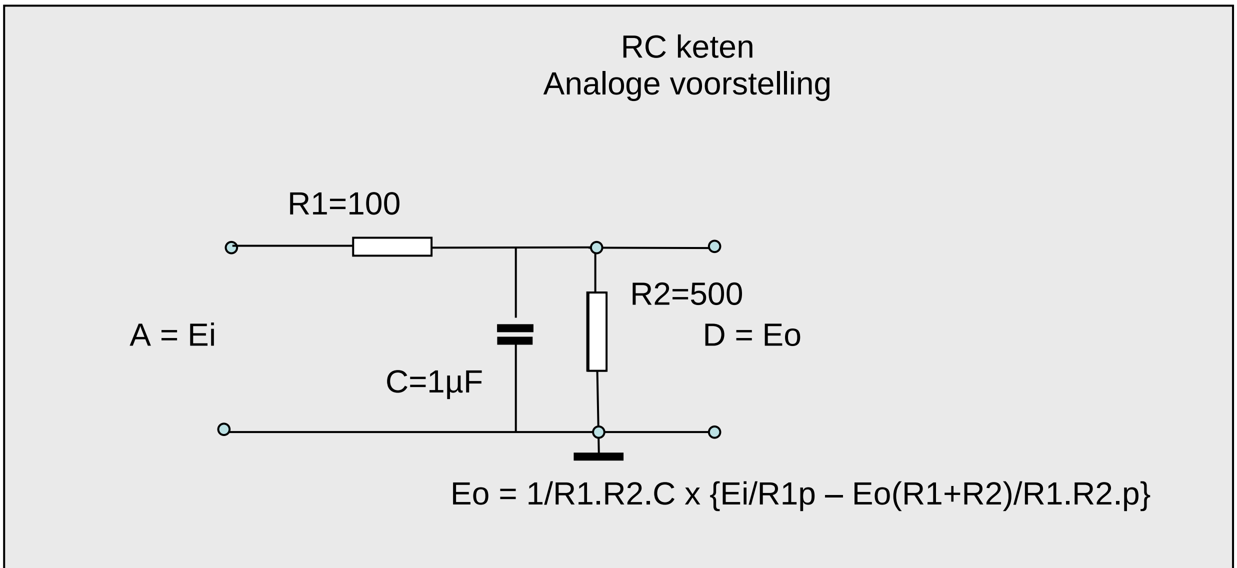
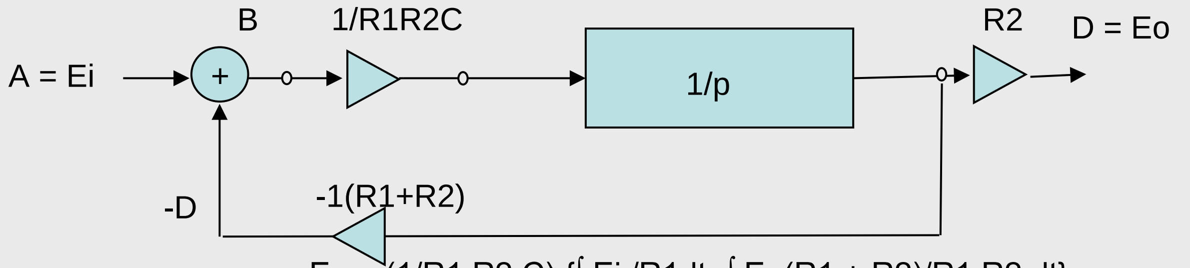


Fig 11

Integrator met terugkoppeling
nummerieke voorstelling



$Eo = (1/R1.R2.C)\ \{\int Ei\ /R1dt - \int Eo(R1 + R2)/R1.R2\ dt\}$
$Eo = 1/R1.R2.C \times \{Ei\ /R1p - Eo(R1 + R2)/R1.R2.p\}$

Fig 12

Op analoge wijze als met het RC netwerk bekomen we:
(Ei – Eo)/R1 = Eo/R2 + Eo.Cp
R2(Ei – Eo) = Eo (R1 + R1.R2.Cp)
R2.Ei = Eo(R1 + R2 +R1.R2.Cp)
En alzo bekomen we onze canonische vorm:

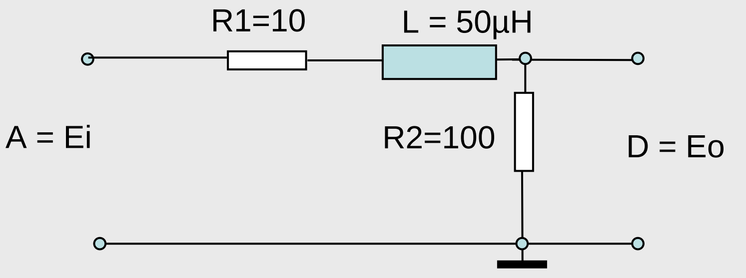
$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R2}{(R1 + R2) + R1 \cdot R2 \cdot C \cdot p}$$

Maar dit kan ook nog anders geschreven worden als:
R2.Ei – (R1 + R2)Eo = Eo.R1.R2.Cp en delen we beide delen door R1.R2.Cp dan bekomen we :
Eo = 1 / R1.R2.C [(Ei.R2 /R1.R2.Cp) – Eo(R1 + R2)/R1.R2.Cp]

2.1.6 OEFENING 6

Een iets meer uitgebreid RL schakeling zoals voorgesteld in Figuur 13 en met bijbehorend blokschema in Figuur 14

RC keten
Analoge voorstelling

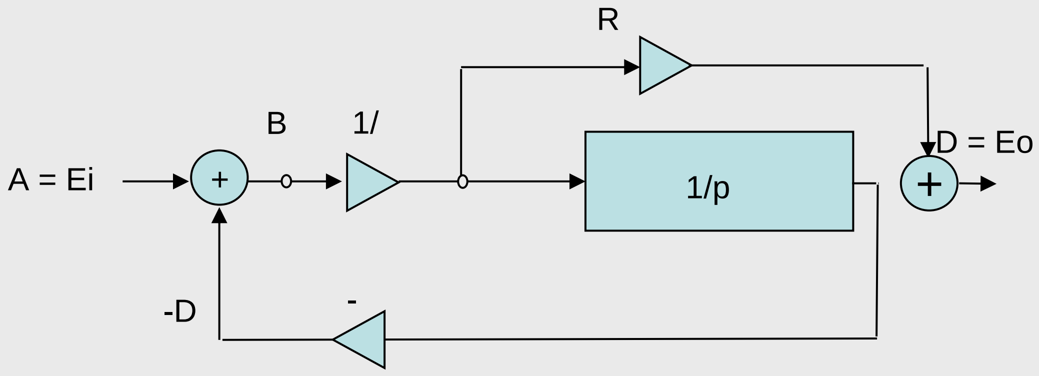


Eo ={Ei.R2 /L.p - Eo(R1+R2)/p}

Fig 13

.

Integrator met terugkoppeling
nummerieke voorstelling



Fig

Eo ={Ei .R2/Lp + Eo(R1 + R2)/p}

Ook hier kunnen we op eenvoudige wijze een analyze maken, als volgt:
(Ei – Eo) / (R1 + Lp) = Eo/R2
Ei.R2 – Eo.R2 = Eo(R1 + Lp) en hieruit volgt de canonische vorm:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R2}{(R1 + R2) + L\cdot p^{1}}$$

Maar we kunnen dit ook op een andere wijze schrijven, immers:

Ei.R2 – Eo.R2 = Eo(R1 + Lp)
Ei.R2 – Eo(R1 + R2) = Eo.Lp of beide delen delen door Lp bekomen we
Eo = Ei.R2/Lp –Eo(R1 + R2) / Lp Wat dus door het blokschema in figuur 14 is weergegeven.

2.2 ALGEMENE REGEL

De onvermijdelijke vraag naar al deze voorbeelden is natuurlijk of er geen algemene regel uit te halen valt, die toepasselijk is op al onze voorbeelden, zodat we zonder al deze berekeneningen te doen vanuit de algemene (canonische) vorm direct ons blokschema kunnen tekenen.
Natuurlijk is dit mogelijk als we even onze canonische vorm bekijken, dan hebben we voor alle eerste orde vergelijkingen dezelfde vorm die kan neergeschreven worden als volgt:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{a0 + a1 \cdot p^{1}}{b0 + b1 \cdot p^{1}}$$

Hierin kan a0, a1 en ook b0 en b1 alle mogelijke waarden aannemen zoals R,C, R/L ... maar ook de waarde = 0.
Het algemeen blokschema ziet er dan uit zoals in figuur 15, en een ietsje anders getekend, maar wat later zal blijken, in een meer algemene vorm, in figuur 16.

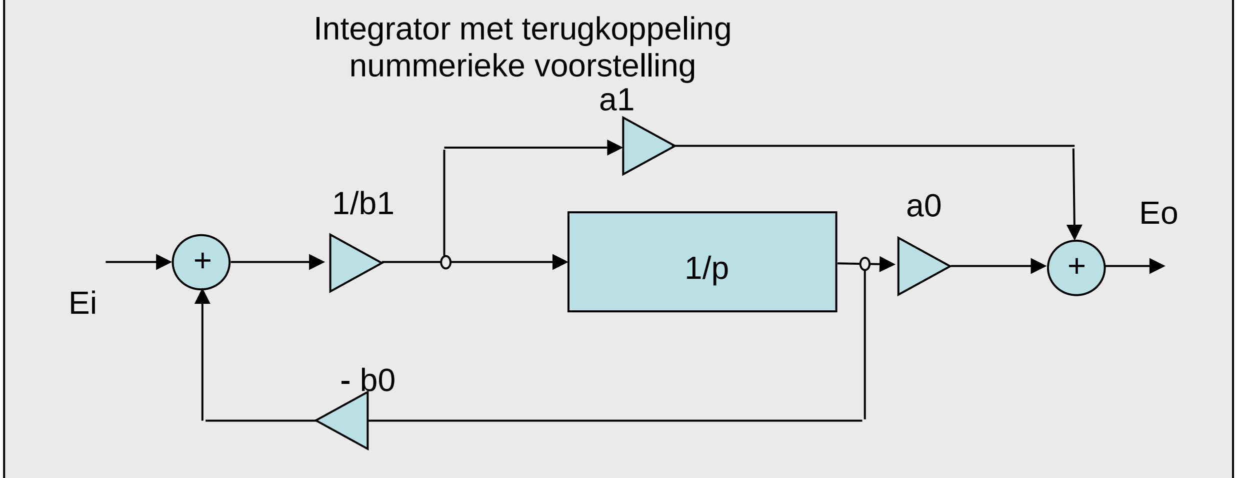


Fig 15 Eo/Ei =(a0 + a1p)/(b0 + b1p)

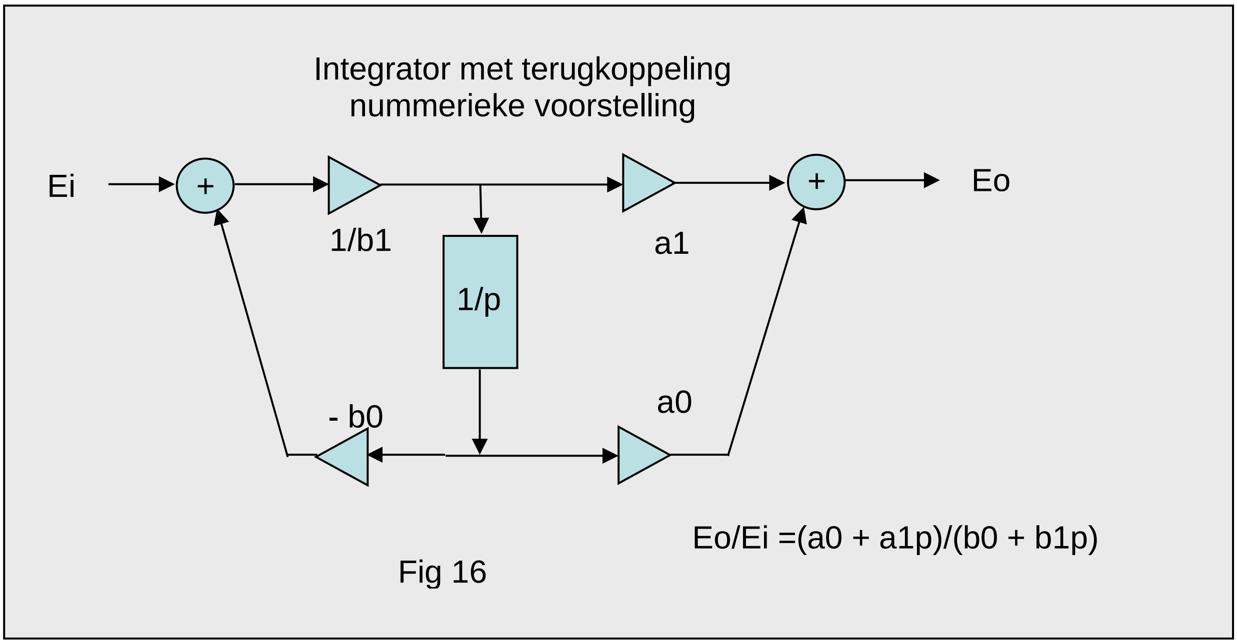


Fig 16

Noteer: 1/b1 voor de vermenigvuldiger en niet b1

- b0 (het minteken voor b0)

Merk op, dat eenmaal ik vanuit mijn schema de canonische vorm kan vinden, het heel eenvoudig wordt om de verschillende parameters a0, a1, b0 en b1 aan het programma mee te delen.

In een derde artikel, wil ik nader ingaan, hoe men (in de meeste gevallen), door alleen maar in te vullen van de componenten, het programma in staat is om de canonische vorm te berekenen, en de parameters zelf in te vullen.

Nemen we terug

OEFENING 1

Waarin we gevonden hadden dat

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p^1}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:

1/b1= 1/RC; - b0 = -1; a0 = 1; a1 = 0.

Zoook

OEFENING 2

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p^1}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:

1/b1= R/L; - b0 = -1; a0 = 1; a1 = 0.

Zoook

OEFENING 3

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R \cdot C \cdot p^1}{1 + R \cdot C \cdot p^1}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:

1/b1= 1/RC; - b0 = -1;   a0 = 0; a1 = RC.

Zoook
OEFENING 4

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{\frac{L}{R}\cdot p^{1}}{1 + \frac{L}{R}\cdot p^{1}}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:
1/b1= R/L; - b0 = -1;   a0 = 0; a1 = L/R.

Zoook
OEFENING 5

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R2}{(R1 + R2) + R1\cdot R2\cdot C\cdot p^{1}}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:
1/b1= 1/R1.R2; - b0 = -(R1 + R2);   a0 = R2; a1 = 0.

Zoook
OEFENING 6

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{R2}{(R1 + R2) + L\cdot p^{1}}$$

Dit betekent ingevuld in ons algemeen schema dat:
1/b1= 1/L; - b0 = -(R1 + R2);   a0 = R2; a1 = 0.

Merk op dat deze voorstelling zich niet beperkt tot passieve netwerken, maar dat evengoed OpAmps, of transistoren, kunnen verwerkt worden.
Laten we, om aan te tonen dat ook actieve elementen in deze structuur passen, eens nagaan hoe een RC-integrator schakeling met een niet-geidialiseerde OpAmp kan opgelost worden.

2.2.1 OEFENING 7

Een eenvoudige analyze van figuur 17 leert ons het volgende.
We veronderstellen nog wel (om het niet al te ingewikkeld te maken) dat de inwendige input weerstand zeer groot is, zodat de stroom in de OpAmp verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de stroom door de weerstand R en capaciteit C. De versterkingsfaktor (A) is gelijk aan een bepaalde waarde b.v. A = 100.

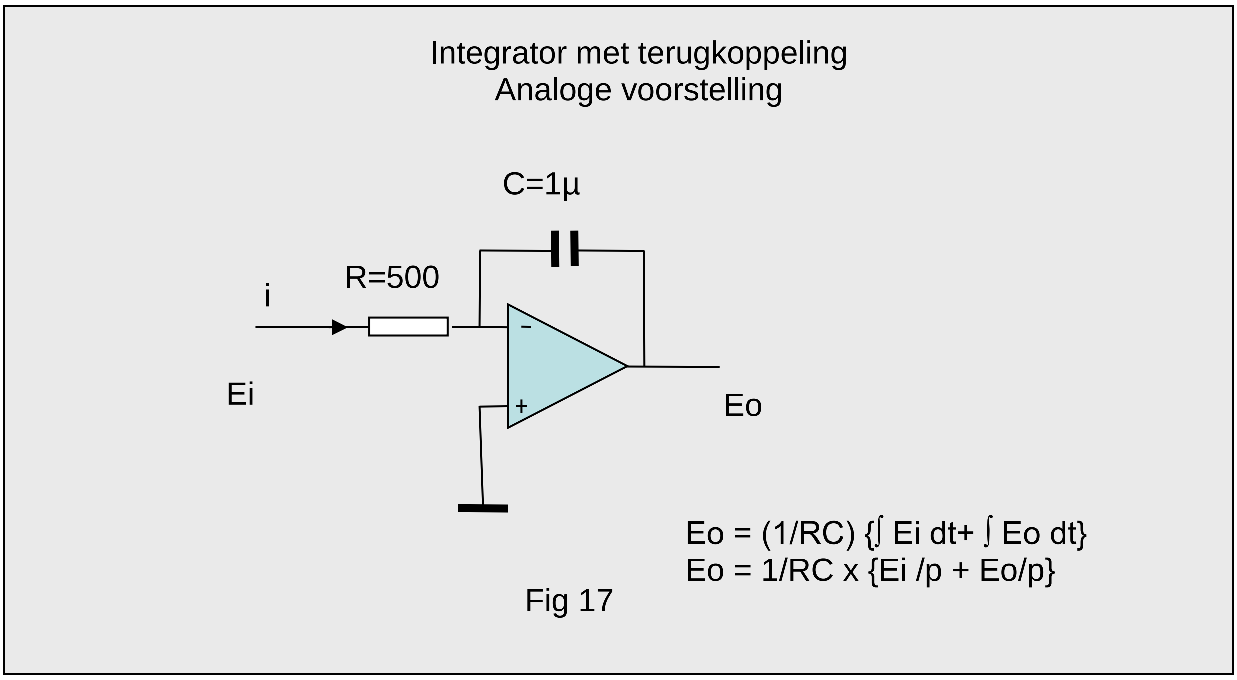


Fig 17

Dan is (Ei – Ein)/ R = (Ein – Eo).Cp
Ofwel Ei – Ein = (Ein – Eo).RCp
Nu is Eo/Ein = -A en dus Ein = - Eo/A
Ei + Eo/A = (- Eo/A – Eo).RCp
En na wat rangschikken

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{-A}{1 + (1 + A)\cdot RCp^{1}}$$

Dit is dus weer de canonische vorm welke rechtstreeks in het blokschema kan ingevuld worden, zoals te zien in figuur 18.
Met 1/b1= 1/(1 + A).RC; - b0 = -1;   a0 = -A; a1 = 0.

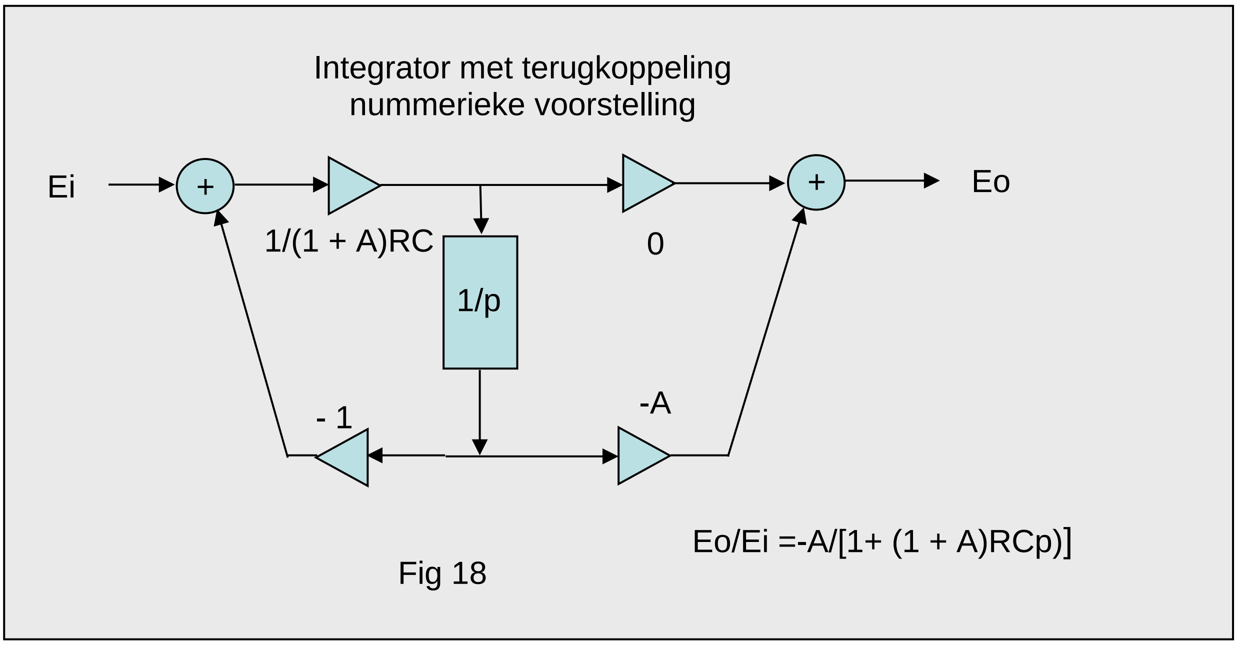


Fig 18

2.3 DUBBELE INTEGRALEN

Veronderstel dat we dubbel integralen moeten berekenen. Ook in dit geval zal hetgeen we tot nu toe gezien hebben van pas komen. Inderdaad zoals het blokschema in figuur 19 laat zien kunnen we een dubbel integraal voorstellen als het nogmaals integreren van de vorige toestand.

Immers als Eo/Ei = 1/p dan is ook op identieke wijze Eu/Eo =1/p en dus
Eu/Ei = Eu/Eo x Eo/Ei = 1/p x 1/p ofwel Eu/Ei = $1/p^2$.

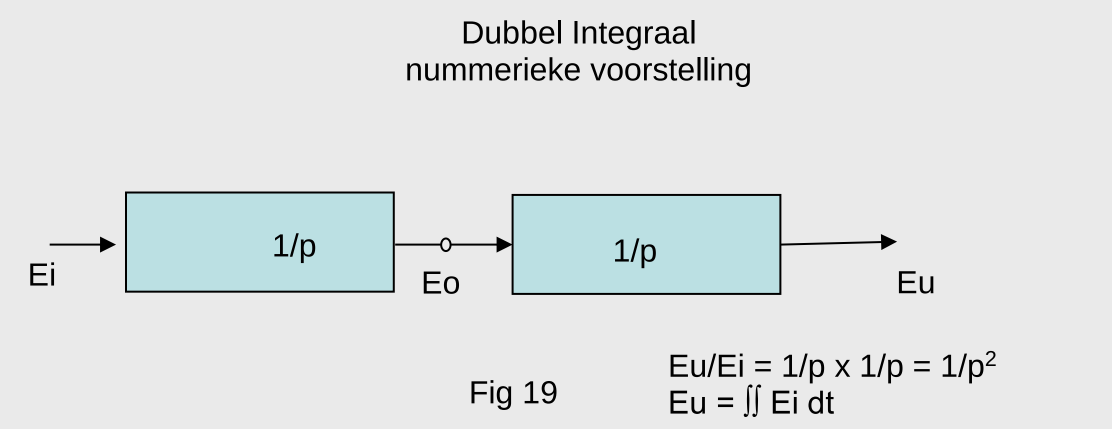


Fig 19

Natuurlijk kan ook hier, na iedere integraal, een gedeeelte van de uitgang teruggekoppeld worden aan de ingang. Maar ook hier blijft de algemene structuur behouden.
Alsdusdanig zal het algemeen schema van een tweede order integratie er uitzien als in figuur 20.

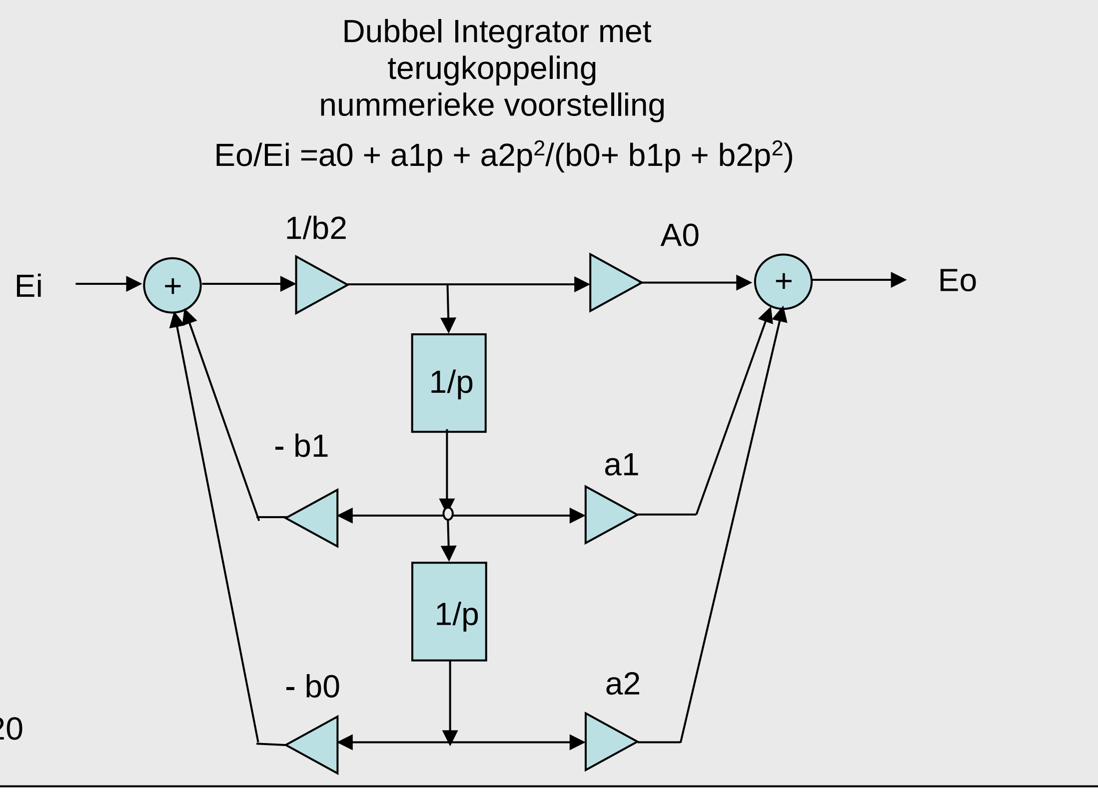
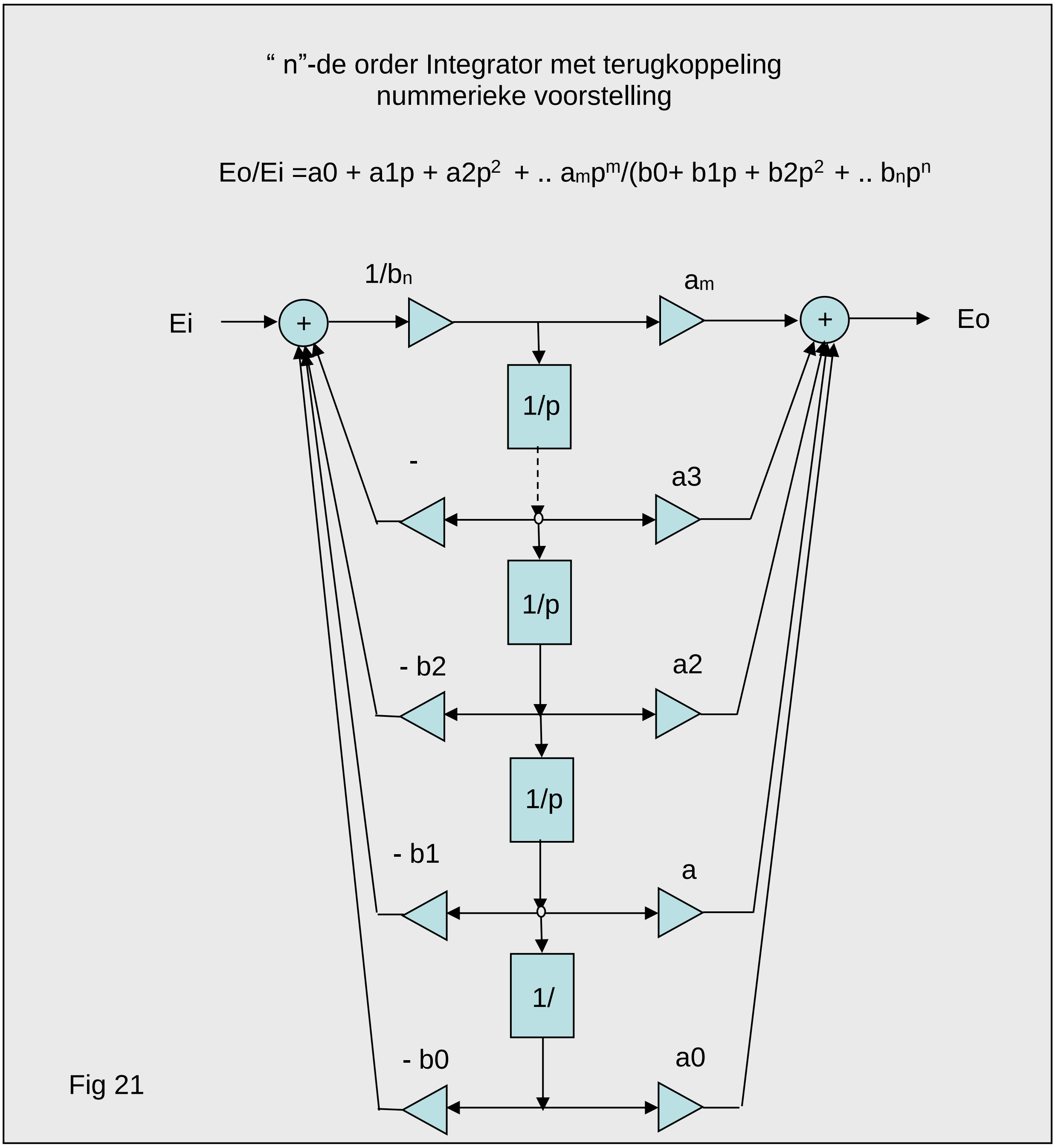


Fig 20

2.4 HOGERE ORDE VERGELIJKINGEN

Het is zondermeer in te zien dat we dit blokschema kunnen veralgemenen tot een blokschema voor gelijk welke orde van integraal dat we ook maar willen uitvoeren, zoals te zien is in figuur 21.



Het is algemeen gekend dat in de elektronica de meeste schakelingen zich beperken tot integralen van de eerste of de tweede orde, maar in digitale filtertechnieken komen hogere orders vrij veelvuldig voor, en dan spreken we over order van 128 tot 256 en zelfs nog hoger.
Maar nietegenstaande deze monsterachtige wiskundige formules kan voor het oplossen van deze functies de hier voorgestelde structuur gebruikt worden. Alleen een beperking van computergeheugen en snelheid om alle berekeingen uit te voeren zijn de voornaamste beperkingen.
Maar ook het inbrengen van de parameters, en daarom zal er naar gestreefd worden dat in digitale filter techniek ook de verschillende parameters automatisch met een wiskundig algoritme

uitgerekend worden.

2.5 VOORBEELDEN VAN TWEEDE ORDE INTEGRALEN

Ook hier wil ik met een paar voorbeelden aantonen dat het echt niet zo moeilijk is om de meest voorkomende schakelingen te analyzeren, en tot een canonische vorm te komen.
Immers, en dit is het voornaamste, eens we de canonische vorm hebben kunnen we de parameters eenvoudig aan een algemeen programma ingeven als input parameters.

2.5.1 OEFENING 8

Het zeer gekende RLC netwerk zoals afgebeeld op figuur 22 is ook eenvoudig te analyzeren als volgt:
(Ei – Eo)/(R + Lp) = i en ook Eo.Cp = i dus bekomen we
(Ei – Eo)/(R + Lp) = Eo.Cp
Ei – Eo = Eo.Cp.(R+Lp) en de canonische vorm wordt:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p^1 + LCp^2}$$

En indien we de parameters invullen in het algemeen schema bekomen we dat:
1/b2 = 1/LC; -b1= - RC; -b0 = -1; a2 = 0; a1 = 0; en a0 = 1

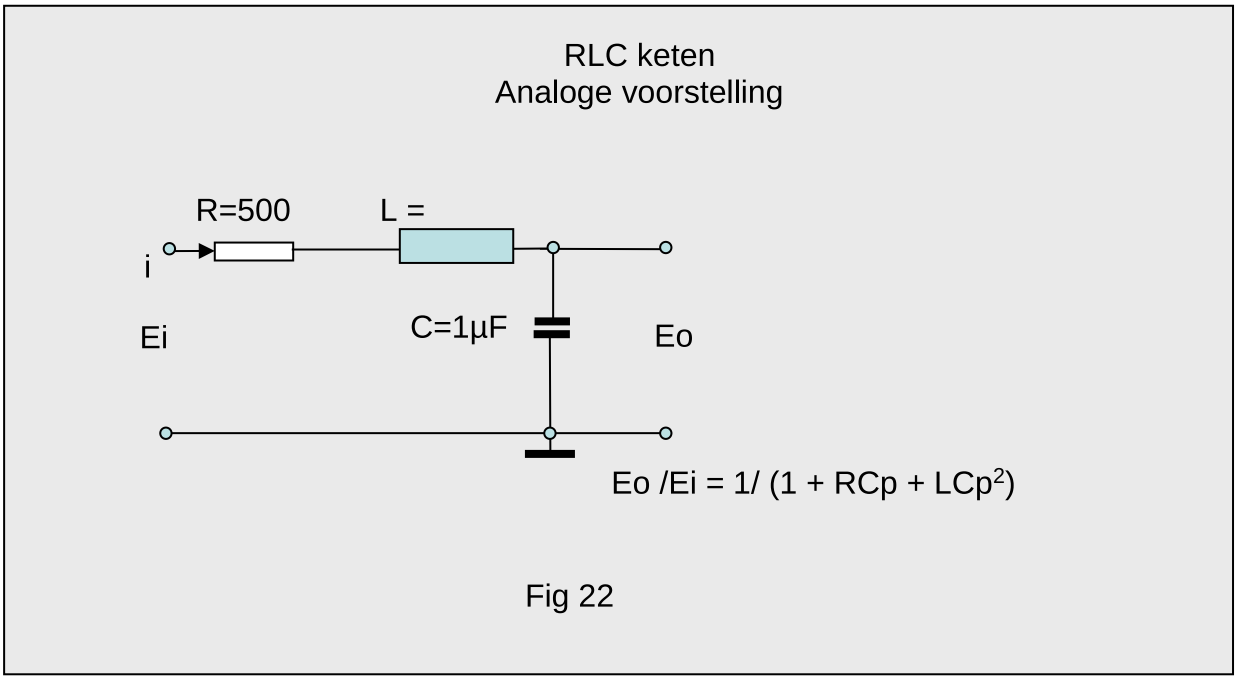


Fig 22

2.5.2 OEFENING 9

Een RCL netwerk, zoals te zien in figuur 23, laat zich op een analoge wijze analyzeren als volgt:
(Ei – Eo) = (1/Cp + R).i
Eo/Lp = i en dit geeft
Ei – Eo = (1/Cp + R). Eo/Lp
Ei = Eo(1 + 1/LCp^2 +R/Lp)

$Ei = Eo(LCp^2 +1 + RCp) / LCp^2$
en zo bekomen we de canonsche vorm:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{LCp^2}{1 + RCp^1 + LCp^2}$$

En indien we de parameters invullen in het algemeen schema bekomen we dat:
1/b2 = 1/LC; -b1= - RC; -b0 = -1; a2 = LC; a1 = 0; en a0 = 0

RCL keten
Analoge voorstelling

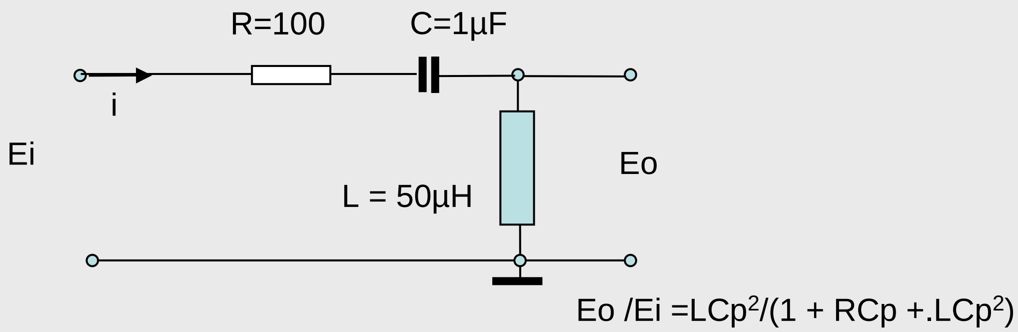


Fig 23

2.5.3 OEFENING 10

Een zeer veel voorkomend LC tank circuit zoals te zien in figuur 24 is als volgt te analyzeren:
$Eo = Ri$
$(Ei – Eo).Cp = i_1$
$(Ei – Eo)/Lp = i_2$
en vermits $i_1 + i_2 = i$ volgt
$(Ei – Eo)(1/Lp + Cp) = Eo/R$
en na wat uitwerken bekomen we
$(Ei – Eo) = EoLp/[(1 + CLp^2)R]$
$Ei = Eo [1 + Lp/(1 + CLp^2)R]$ of na wat uitwerking bekomen we de canonische vorm

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{1 + CLp^2}{1 + \frac{L}{R}\cdot p^1 + LCp^2}$$

En indien we de parameters invullen in het algemeen schema bekomen we dat:
1/b2 = 1/LC; -b1= - L/R; -b0 = -1; a2 = LC; a1 = 0; en a0 = 1

RLC keten
Analoge voorstelling

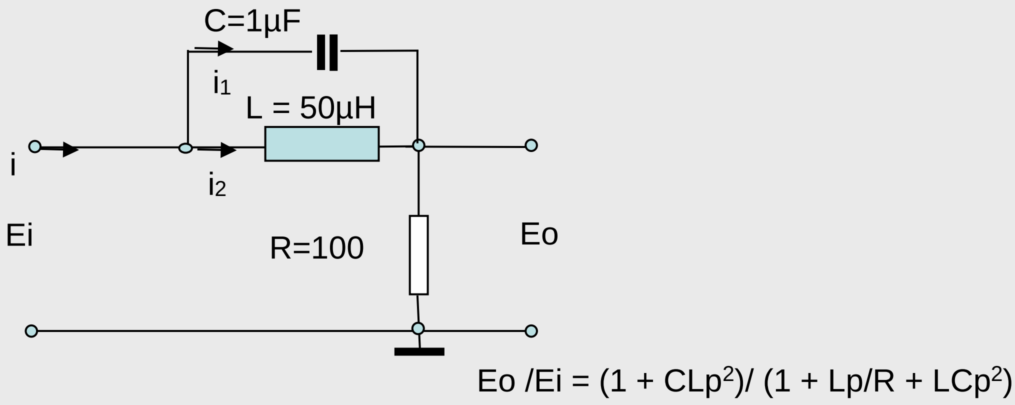


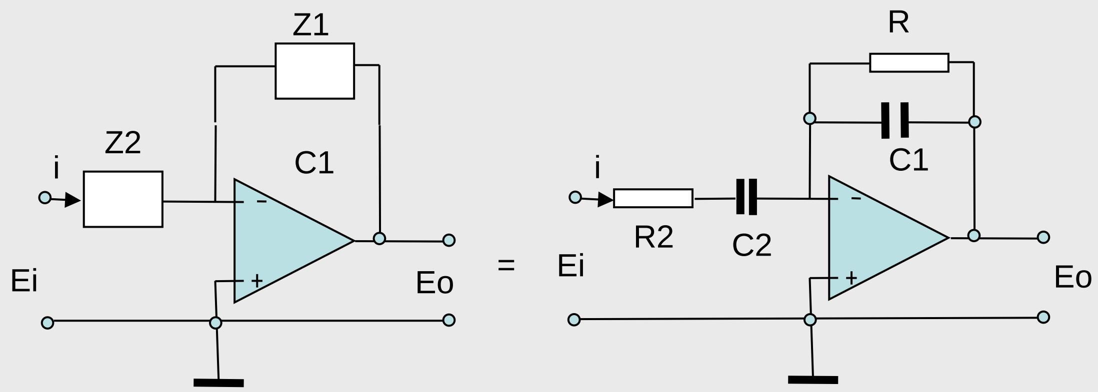
Fig 24

2.5.4 OEFENING 11

Maar niet alleen passieve schakelingen kunnen opgelost worden met deze algemene methode, maar ook schakelingen met OpAmps, of andere actieve elementen.
Hier volgt een voorbeeld met een OpAmp.
We veronderstellen een ideale OpAmp, dus versterkingsfaktor oneindig groot, en uitgangsweerstand gelijk aan nul.
Dan kunnen we de schakeling van figuur 25 als volgt analyzeren:
Eo/Ei = - Z1/Z2 hier is Z1 = de parallel schakeling van R1 en C1, en Z2 is de serie schakeling van R2 en C2 dus kunnen we schrijven
Z1 = (R1/C1p) / (R1 + 1/C1p) en Z2 = R2 + 1/C2p
Dit ingevuld bekomen we:
Eo/Ei = - (R1/C1p) / (R1 + 1/C1p)/ R2 + 1/C2p of anders geschreven in zijn canonische vorm:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{-R1C2p^{1}}{1 + (R1C1 + R2C2)\cdot p^{1} + R1R2C1C2p^{2}}$$

Dubbel Integrator met OpAmp
Analoge voorstelling



Eo/Ei = -Z1/Z2

Eo/Ei = -R1C2p/1 + (R1C1 + R2C2)p + R1R2C1C2p^2

Fig 25

2.6 OVERWEGINGEN BIJ DE ALGEMENE VORM

Voor diegene die meer ginteresseert zijn in wiskundige formules, en zich verdiepen in regeltechniek of digitale filters ofwel signal processing zullen al opgemerkt hebben dat de aangehaalde canonische vorm sterk gelijkt op de formules (ofwel polynomials) die voorkomen in regeltechniek, digitale filter techniek, sigal processing enz...

Ik heb eens verschillende boeken, die in mijn kast staan, opengeslagen en gekeken naar de voorstelling van de polynomials. Met eerst deze bemerkingen:
$1/s = s^{-1}$, zoook $1/s^2 = s^{-2}$; p of s of z hebben, voor het eenvoudig te houden, dezelfde betekenis.
En ziehier wat voor verschillende formules ik in mijn kast heb tegengekomen:

1) *In "Feedback Control Systems, Analyses and Syntheses " van D'Azzo & Houpis:*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + .. + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0}{s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + .. + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s^1 + b_0} \; *$$

2) *In "Network Analysis and Synthesis " van Louis Weinberg:*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + .. + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0}{s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + .. + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s^1 + b_0} \cdot H \; *$$

3) *In "Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge " van Winfried Oppel:*

$$\frac{x_a}{x_e} := \frac{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \ldots + b_m \cdot p^m}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \ldots + a_n \cdot p^n} \; *$$

4) *In " One-Dimensional Digital Signal Processing" van Chi-Tsang Chen:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} := \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + a_2 \cdot z^{n-2} + \ldots + a_n} \; *$$

5) *In Digital Filters and Signal Processing" van Leland B. Jackson:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} := \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_m \cdot z^{-m}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots + a_n \cdot z^{-n}} \; *$$

6) *In Digitale Signaalbewerking" van Ir A.W.M. Van den Eynden & Ir N.A.M. Verhoeckx:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} := \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_n \cdot z^{-n}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \ldots - a_m \cdot z^{-m}} \; *$$

7) *In "Active Filters, a practical approach on feedback amplifier theory" van F.E.J. Girling & E.F. Good:*

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} := \frac{1 + a_1 \cdot pT + a_2 \cdot p^2 \cdot T^2 + \ldots + a_n \cdot p^n \cdot T^n}{1 + b_1 \cdot p \cdot T + b_2 \cdot p^2 \cdot T^2 + \ldots + b_m \cdot p^m \cdot T^m} \; *$$

8) *Feedback and Control Systems" van J. Distefano A. Stubberud & I. Williams*

$$\frac{Y(s)}{X(s)} := \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s^1 + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0} \; *$$

9) *"Easy to use BASIC program analyzes transient response" van William Gill:*

$$\frac{Eo(s)}{Ei(s)} := \frac{a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0}{b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s^1 + b_0} \; *$$

Uit al de aangehaalde voorstellingen, die in feite allemaal hetzelfde uitdrukken, maar waarin bepaalde parameters een andere betekenis hebben, kom ik tot de volgende conclusie:
Vermits formule 1,2 (buiten een constante H),3 (s=p en b=a) en 9 goed op elkaar trekken, en vermits ik hier niet te diep wil ingaan in de zogezegde "z-transformatie" (met de bijbehorende z in plaats van s of p indicatie) heh ik de volgende opmerkingen:
1) Persoonlijk hou ik eraan dat a's van boven staan en b's van onder, al is het maar om de volgorde van het alphabet te respecteren.
2) Liever zie ik een formule met p^m dan p^{-m}, ook al is het waar dat p^{-m} in feite niets anders is dan een andere voorstelling van $1/p^m$, maar een vermenigvuldiging lijkt toch altijd eenvoudiger dan een deling.
3)Een vervelende misleiding is de operator s. "s" is in de voorkomende formules in feite het symbool van dy/dx terwijl 1/s = ∫ydx. Dus s heeft niets met "sommatie" of iets dergelijks te maken. Om die verwarring te omzeilen gebruik ik bij voorkeur de letter p.
Eigenlijk heb ik op de hogeschool alles geleerd uit het duitse handboek (3), en daarom verdedig ik, zoals trouwens mijn leraar van toen de letter p.
4) Vermits de meeste toepassingen zich beperken tot de tweede en derde macht zet ik liever de a_0 ,a_1 .. a_n in oplopende volgorde.
5) Vermits m eerder in het alphabet verschijnt dan n verwijs ik de $a_m.p^m$ toe aan de Teller en $b_n.p^n$ aan de Noemer. Meestal zal n groter of gelijk aan m zijn.
6) Men kan altijd a_0 of b_0 gelijk maken aan 1 door desnoods in Teller en Noemer alle parameters te delen hetzij door a_0 ofwel door b_0 , maar dit maakt de doorzichtigheid van de formule alleen

maar ingewikkelder.
Al deze opmerkingen noteer ik hier met alleen maar de bedoeling om het zo simpel mogelijk te houden, met in gedachten het motto van Einstein:" Maak alles zo eenvoudig mogelijk, maar vereenvoudig niets"
Daarom gebruik ik voor de canonische vorm de volgende schrijfwijze:

$$\frac{Eo}{Ei} := \frac{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + \ldots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p^1 + b_2 \cdot p^2 + b_3 \cdot p^3 + \ldots + b_n \cdot p^n} *$$

Ook in al mijn blokschemas en (indien mogelijk) in mijn programmas komen de zelfde parameters voor. Maar ik wil jullie waarschuwen, indien je verschillende naslagwerken of boeken over dit onderwerp naslaat ben je soms eerst een half uurtje bezig met de juiste parameters korrekt te interpreteren, en dat, ook ik, vele uren gefrustreert heb liggen rekenen met een voorstellingswijze uit een boek dat precies nu net niet overeen komt met wat ik juist nodig had. Sommige formules, zoals deze van (7) is volgens mij niet algemeen genoeg en in sommige gevallen zelfs niet van toepassing.
Nog een opmerking. In vele boeken over voornamelijk filtertechnieken zal men soms aantreffen dat s of p = jω ofwel p = j2πf met j = √-1 en als gevolg hiervan is 1/p = -p.
Dit is alleen maar waar als de ingangsspanning een sinus is van een bepaalde frekwentie, en dus alleen maar juist ingeval men een frekwentie gebied wil onderzoeken. B.v. het gedrag van een filter tussen frekwentie f1 en f2. Maar in onze voorstelling is p in 't geheel geen voorstelling van de integraal van een sinus, maar wel van gelijk welke wiskundige uitdrukking, en in dit geval is 1/p niet gelijk aan –p.

3 HET VISUAL BASIC PROGRAMMA

Om jullie niet met alleen maar wat theorie vol te proppen voeg heb ik hierbij een eerste volledig Visual Basic programma.
Dit programma is opgedeeld in drie hoofd-programmas namelijk INTG (integraal) en POLY (polynomial) en STOP, en verscheidene functie programmas, of sub routines, namelijk GRF (Grafiek) , LST (Lijst) en Ei (input Ei functie).

Ik heb nog niet uitgevist hoe ik een string van cijfers en letters ingetypt in een message buffer kan vertalen in een stuk code in mijn programma, daarom heb ik voor het eenvoudig te houden dit opgelost door in de code, vooraleer men het programma laat runnen, de input functie Ei zelf in te vullen. B.v. Ei = 3*X^2 + 5*X +7.

Het programma INTG lost eenvoudige integralen op, ook wel integralen van de eerste orde genoemd.
POLY daarentegen lost integralen (of als praktische toepassing LCR schakelingen) op tot de 11ste orde. Hiervoor heeft men eerst de canonische vorm nodig om de parameters Am en Bn te kunnen invullen.
Als men A(0) = 1 en alle andere A(M) = 0 en B(0)=0 en B(1) = 1 en alle andere B(N) = 0 maakt dan is de formule in POLY niets anders dan Eo/Ei = 1/p of Eo = Ei/p en dit is precies gelijk aan het programma INTG. Ik heb bewust gekozen om twee verschillende programmas te schrijven opdat voor degenen die niet gewoon zijn in programmeer talen te werken, duidelijk de overgang te laten zien van iets eenvoudig naar een programma met loops in een loop.

In een volgend artikel probeer ik uit te leggen hoe het mogelijk is om een programma te schrijven

dat rechtstreeks vanuit het elektronisch circuit de nodige paramaters Am en Bn berekent.
Hier volgt dan de code die in Visual Basic moet ingetypt worden.

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
'VOORALEER DIT PROGRAMMA TE RUNNEN MOET MEN IN "PRIVATE FUNCTION Ei" DE
'FUNCTIE INVULLEN DIE MEN WENST TE INTEGREREN.
'HET EENVOUDIGSTE IS DE GEWENSTE FUNCTIE BIJ TE VOEGEN EN DE VORIGE UIT TE
'SCHAKELEN DOOR ZE ALS COMMENTAAR ['] TE DEFINIEREN.
'Reserveer een tafel van 1001 lokaties voor alle resultaten in te schrijven
Dim Eo(1000) As Single
'Om meerdere lijnen af te drukken moet per lijn LineFeed Carriage Return
'bijgevoegd worden
Dim LFCR
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Sub tekening_PictureBox()
'met de properties wordt een box gemaakt
'dit zou ook kunnen geprogrammeerd worden met "tekening.height = 5415" enz...
'maar dit is nutteloos werk
End Sub
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Sub INTG_Click(index As Integer)
'Dimensioneer lokale variabelen
'"single" is meer dan genoeg voor onze berekeningen
LFCR = Chr(13) + Chr(10) 'dit is de definitie van Line Feed en Carrige Return
Dim A, B, C, D, XA, XB, DX As Single
Dim N
'Eerst vullen we onze input parameters in, namelijk begin en eindpunt
'alsook het aantal intervals
' gebruik "," in plaats van "." voor getallen met een komma
XA = InputBox("ondergrens waarde XA", "XA=?")
XB = InputBox("bovengrens waarde XB", "XB=?")
N = InputBox("aantal intervals N", "N=?")
   If N = "" Then N = 100
   If N > 1000 Then N = 1000
'Bereken DX
DX = (XB - XA) / N
' Voor de trapezium regel moet ik Ei(0) en Ei(1) kennen
'bereken Ei(0)
Call Ei(XT, DX, J)
B = Ei(XT, DX, J)
'schuif deze waarde in A
A = B
'Bereken nu Ei(1) en de volgende (N-1) termen
'Van nu af kan ik steeds de twee berekende waarden opschuiven
'Bereken the N-1 termen
For J = 1 To N
   XT = XA + DX * J
   Call Ei(XT, DX, J)
   B = Ei(XT, DX, J)
   D = C + (A + B) * 0.5 * DX
   C = D
```

```
   A = B
   Eo(J) = D
   'onthoudt de maximum en minimum waarde in YMAX en YMIN
      If Eo(J) > YMAX Then
         YMAX = Eo(J)
      ElseIf Eo(J) < YMIN Then
         YMIN = Eo(J)
      End If
Next J
'geef het eindresultaat weer in de Title Box
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "the value of the integral is " & Eo(N)
' de rest van het programma dient om er een grafiek van te maken
' en de lijst EO(J) mooi uit te printen in een tafel.
'ga naar de subroutine grf(..) en kom dan terug
Call grf(N, YMAX, YMIN)
'ga nu naar de subroutine lst(..) en kom dan terug
Call lst(N)
'nu wordt het scherm getoond met de grafiek en lijst ingevuld
'men kan met de vertikale scrollbar de lijst bekijken
'om het programma te termineren drukt men op de knop STOP
End Sub
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Sub cmdStop_Click()
'hiermee stopt het programma
End
End Sub
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Sub POLY_Click()
' dit is een algemeen programma
' waar alle differentieel en integraal vergelijkingen mee kan
' opgelost worden tot de 11-ste order.
Cls 'Veeg het scherm schoon
' Om meerdere lijnen af te drukken moet per lijn LineFeed Carriage Return
'bijgevoegd worden
LFCR = Chr(13) + Chr(10)
Dim J, I, K, N As Integer
'reserveer voor iedere integraal blok (1/p) een lijst van lokaties AN,BN
'CN,DN overeenkomstig het blokdiagram van 1/p integraal blok.
'reserveer locaties voor de parameters A(m) en B(n)
Dim AN(10), BN(10), CN(10), DN(10), A(10), B(10) As Single
txtTitle.Text = "Dit program lost de navolgende differentieel vgl op"
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "Eo  A0 + A1.p + A2.p^2  ...Am-1.p^m-1+ Am.p^m "
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "--  ========================================"
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "Ei   B0 + B1.p + B2.p^2...Bn-1.p^n-1 + Bn.p^n "
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & " "
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "n moet groter of gelijk zijn aan m"
' De verschillende parameters van de canonische vorm worden ingetypt
N = InputBox("", " orde van de vgl", " N=?")
txtTitle.Text = "De coefficienten moeten in opklimende orde ingetypt worden dus,A0,A1,A2,A3...
An" & LFCR
'A(m) parameters worden in A(M) opgeslagen
For I = 0 To N
```

```
    A(I) = InputBox("Input Am(" & (I) & ")", (I), "A" & (I) & "=?")
    txtTitle.Text = txtTitle.Text & "Am(" & (I) & ") = " & A(I) & ", "
Next I
'B(n) parameters worden in B(N) opgeslagen
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR
For I = 0 To N
    B(I) = InputBox("Input Bn(" & (I) & ")", (I), "B" & (I) & "=?")
    txtTitle.Text = txtTitle.Text & "Bn(" & (I) & ") = " & B(I) & ", "
Next I
' time base unit, de begin- en eindwaarde van de integraal wordt gevraagd
XA = InputBox("ondergrens waarde XA", "XA=?")
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "XA = " & XA & ", "
XB = InputBox("bovengrens waarde XB", "XB=?")
txtTitle.Text = txtTitle.Text & "XB = " & XB & ", "
'het aantal intervals wordt gevraagd
K = InputBox("aantal intervals K", "K=?")
    If K = "" Then K = 100
    If K > 1000 Then K = 1000
txtTitle.Text = txtTitle.Text & "K = " & K
'bereken de stap waarde, of de basis van de trapezium.
DX = (XB - XA) / K
' hierkomt het integratie program
For J = 0 To K
    'bepaal voor iedere step de plaats op de x-as.
    XT = XA + DX * J
'SB is de sommatie van de Bn*1/p^n juist voor Ei er wordt bijgeteld
' voor iedere sample wordt FB op 0 ge-initialiseerd
    SB = 0
'ga naar de subroutine ,de input functie Ei, waar iedere sample wordt
'uitgerekend.
'Noteer dat DX en J is nodig als ik een DIRAC functie definieer
    Call Ei(XT, DX, J)
    E = Ei(XT, DX, J)
' nu wordt per stage Bn*1/p^n uitgerekend, Note A(0) is 0 in het begin
'SB is het punt juist vooraleer Ei wordt bijgeteld
'noteer dat DN(I) = 1/p^I moet vermenigvuldigd worden met B(N-I)
    For I = 1 To N
        SB = SB + DN(I) * B(N - I)
    Next I
'nu voeren we de optelling uit met Ei en x 1/Bn
'noteer dat Bn = B(N),Bn-1 = B(N-1) enz  tot B0 = B(0)
    DN(0) = (1 / B(N)) * (E - SB)
    BN(1) = DN(0)
' nu voeren we de trapezoide regel uit D = C + 1/2*(A + B)*DX
    For I = 1 To N
        DN(I) = CN(I) + 0.5 * (AN(I) + BN(I)) * DX
    ' doorschuiven van de BN(I) naar AN(I) en DN(I) naar CN(I)
        CN(I) = DN(I)
        AN(I) = BN(I)
        BN(I + 1) = DN(I)
    Next I
' nu berekenen we de Am*1/p^m kant, en het uiteindelijk resultaat
```

```
' Eo wordt in iedere locatie E(J) geplaatst.
' voor iedere sample(J) wordt E(J) op 0 ge-initialiseerd.
'Noteer dat DN(I)(en ook CN(I)  de sommatie van alle samples blijft
'onthouden en niet ge-initialiseerd wordt!
'noteer dat DN(I) = 1/p^I moet vermenigvuldigd worden met A(N-I)
   Eo(J) = 0
       For I = 0 To N
       Eo(J) = Eo(J) + A(N - I) * DN(I)
   Next I
' dit herhalen we voor iedere waarde van Ei
'noteer dat de eerste keer was eigenlijk voor A(I) te berekenen
'om onze trapezium regel te kunnen gebruiken. Dit lossen we op
'door E(0) waarde niet te gebruiken.
   If J = 0 Then Eo(J) = 0
'bereken ook max en min waarde
   If Eo(J) > YMAX Then YMAX = Eo(J)
   If Eo(J) < YMIN Then YMIN = Eo(J)
'herhaal dit hele verhaaltje voor iedere sample
Next J
'druk de uitkomst van de integraal af
txtTitle.Text = txtTitle.Text & LFCR & "the value of the integral is " & Eo(K)
' de rest van het programma dient om er een grafiek van te maken
' en de lijst EO(J) mooi uit te printen in een tafel.
Call grf(K, YMAX, YMIN)
Call lst(K)
   End Sub
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Private Function grf(N, YMAX, YMIN)
'maak een grafiek van de resultaten Eo(J)
'In een volgende versie zal ik ook met YMIN rekening houden
'bepaal het punt X0,Y0 van het assenkruis, dit is uitgedrukt in Twins
CX = 360
CY = 4920
tekening.CurrentX = CX
tekening.CurrentY = CY
'Maximum twins op de X-as = 8160 en Maximum twins op de Y-as = 5040
XM = 8160
XL = CY + 70
YM = 4680
TX = (XM - CX) / 100
TY = YM / 100
STX = (XM - CX) / N
STY = YM / N
'teken de X en Y -as
tekening.Line (CX, CY)-(XM, CY)
tekening.Line (CX, CY)-(CX, CY - YM)

For I = 0 To 100
   'teken de X-as streepjes
   tekening.Line (CX + I * TX, CY)-(CX + I * TX, XL + K)
    'teken de Y-as streepjes
```

```
   tekening.Line (CX, CY - I * TY)-(CX - 100 - K, CY - I * TY)
   'om de 10 kleine lijntjes wordt er een groter lijntje van 100 twins
   'meer getekend
   M = M + 1
   If M = 10 Then
      K = 100: M = 0
   Else: K = 0
   End If
Next I
'De maximale hoogte van de Y-as is YM twins daarom scalefactor YM/YMAX
'teken de lijn op de grafiek
SCA = YM / YMAX
   For J = 0 To N - 1
tekening.Line (CX + J * STX, CY - Eo(J) * SCA)-(CX + (J + 1) * STX, CY - Eo(J + 1) * SCA)
   Next J
End Function
------------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Function lst(N)
'we maken een lijst met ongeveer 100 resultaten
'dit doen we door N/100 als step waarde te nemen om iets af te drukken
Dim SW As Integer
SW = Int(N / 100)
intResult.Text = " stap interval N/100=" & SW
   For J = 0 To N
      If Z = SW Then
'indien je wenst de getallen af te ronden tot twee cijfers na de komma
'maakt je volgende commentaar lijn effectief door ['] weg te laten
   Eo(J) = Format(Eo(J), "###,##0.00")
      intResult.Text = intResult.Text & LFCR & J & "   " & Eo(J)
      Z = 0
      End If
      Z = Z + 1
   Next J
intResult.Text = intResult.Text & LFCR & N & "   " & Eo(N)
End Function
------------------------------------------------------------------------------------------------------------
Private Function Ei(XT, DX, I)
 X = XT
 'hier zijn al enkele interessante funties ingevuld
  'Ei = 10 * Exp(-0.5 * X)
  'Ei = 12 / (2 + X ^ 2)
  'Ei = 1 / 5 * X
  'Ei = X
  'Ei = Sin(X) ^ 2 + Cos(X)
  'hierna volgt een DIRAC functie, dit is een IMPULS met een duurtijd van
  'één sample en waarvan de waarde altijd gelijk is aan 1
  'daarom is Ei = 1/DX immers 1/DX * DX = 1.
  'deze funtie kan men gebruiken om de response op een impulse te zien

  If I =(0 Or 1) Then
  Ei = 1 / DX
  Else: Ei = 0
```

```
 End If
End Function
```